

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант -22 Дата Олимпиады 12.07.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	2	30					82	восемьдесят два	<i>Ки</i>

N°1

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} - 2 = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} = 11 \text{ (1) } +$$

$$\text{(1) } \cdot \text{(1)} : \frac{a^4}{2^4} + \frac{2^4}{a^4} + 2 = 121 \Rightarrow \frac{a^4}{2^4} + \frac{2^4}{a^4} = 119 \text{ (2) } +$$

$$\text{(1) } \cdot \text{(2)} : \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} + \frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} = 11 \cdot 119$$

$$\frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = 119 \cdot 11 - 11 = 118 \cdot 11 = 1298 \text{ Ответ: } 1298$$

N°3

① $x^2 - 23y + 66z + 612 = 0$

② $y^2 + 62x - 20z + 296 = 0$

③ $z^2 - 22x + 64y + 525 = 0$

① + ② + ③ : $x^2 + y^2 + z^2 + 60x + 44y + 46z + 1413 = 0$

$$(x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 = 0 \Rightarrow x=20; y=22; z=23$$

подстановка - проверка

Ответ: $x=20; y=22; z=23$ (4)

Бланк олимпиадной работы

№5

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

при $k = 3$, $k = -1$ — уравнение линейное ~~одно~~, откуда
вероятность того, что $k = \text{какое-то}$, где s — какое-то опре-
делённое число строится нулю $\Rightarrow$ этими матри
преобразов

$$x = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{9k^2 - 20k + 25 - 8k^2 + 16k + 24}}{2} = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{k^2 - 4k + 8}}{2} = \frac{5 - 3k \pm (k - 2)}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 2k \\ x_2 &= -1 - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 - 2k &\leq -2 - 2k \\ -1 - k &\leq 12 - 4k \end{aligned}$$

$$3k \leq 13$$

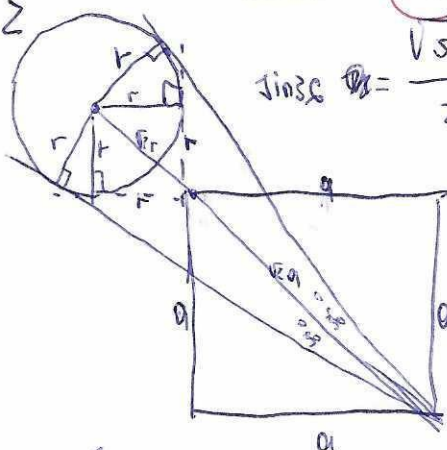
$$k \leq \frac{13}{3}$$

$$p = \frac{\frac{13}{3} - 3}{5} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$$

Ответ: $\frac{4}{15}$

Уравнение
решено
кварто

№2



$$\sin 36^\circ = \frac{r}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r = 2\sqrt{2} \sin 36^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sqrt{5}-1$$

$$(\sqrt{2}r + \sqrt{2}a) \cdot \sin 36^\circ = r$$

$$(r+a) \frac{\sqrt{5}-1}{2} = r$$

$$r \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 \right) = -a$$

$$r = \frac{2 - \sqrt{5} + 1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}-1-2}{2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5}-3} = \frac{2(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5}+3)}{5-9} = \frac{2(15 - 5)}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$$

$$r = \frac{2 - \sqrt{5} + 1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5} + 1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1} = \sqrt{5} - 1$$

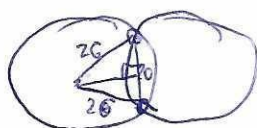
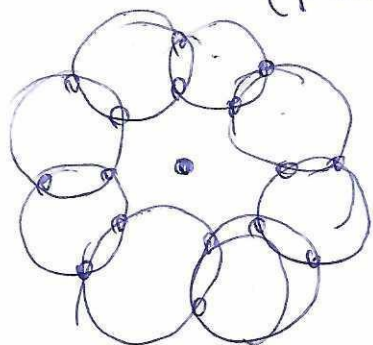
Ответ: $\sqrt{5} - 1$

Бланк олимпиадной работы

$k=4$

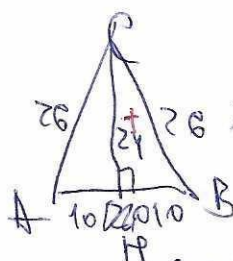
(рисунок неточный (из-за округлостей))

Толщина между шаров:



$r = 26$

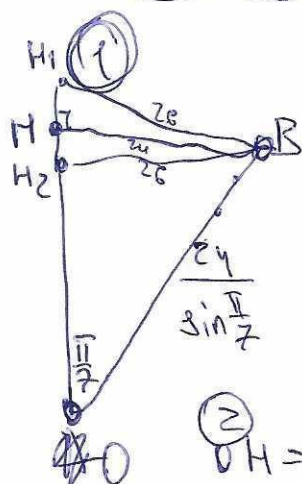
Расстояние между точками пересечения из условия равно 20



Расстояние между центрами окружностей -

$CH = \sqrt{CB^2 - AB^2} = 24$
Толщина между шаров, где его вершины - центры

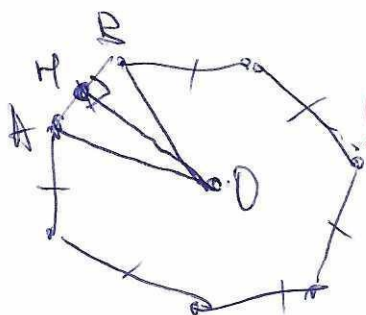
окружностей (от правого) -



$OH = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{7}} = 24 \csc \frac{\pi}{7}$

$\Rightarrow OH_2 = 24 \csc \frac{\pi}{7} - 10$

$\Rightarrow OH_1 = 24 \csc \frac{\pi}{7} + 10$



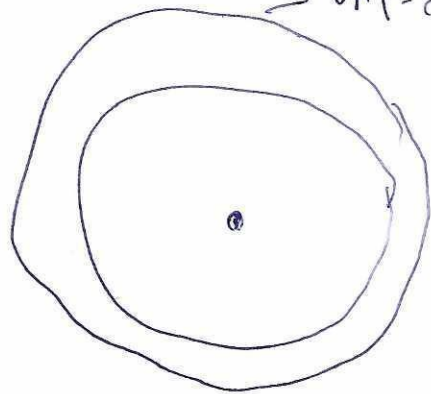
По ребрам - 48?

O - центр окружностей

$\angle BOA = \frac{2\pi}{7}$

$\angle BOH = \frac{\pi}{7}$

$\Rightarrow BO = \frac{HB}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{7}}$



$r = OH_2$
 $R = OH_1$

$\Rightarrow S = \pi R^2 - \pi r^2$

$\Rightarrow \pi \cdot (24^2 \cdot \csc^2 \frac{\pi}{7} + 240 \cdot 2 \csc \frac{\pi}{7} + 100 - 24^2 \csc^2 \frac{\pi}{7} + 240 \cdot 2 \csc \frac{\pi}{7} - 100) =$

$= \pi \cdot (240 \cdot 4 \csc \frac{\pi}{7}) = 960\pi \cdot \csc \frac{\pi}{7} \text{ км}^2$

Ответ: $960\pi \csc \frac{\pi}{7} \text{ км}^2$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

115877

0123456789

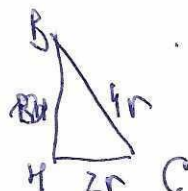
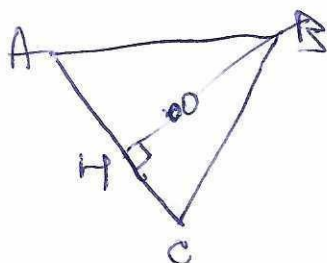
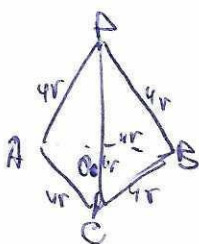
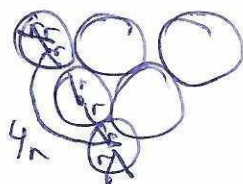
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

№ 4



Сначала найдём радиус шаров
~~это радиус~~ радиус описан-
ный вокруг тетраэдра из
шаров такой же как и
радиус сферичности опи-
санной вокруг тетраэдра
со сторонами $4r$ и ещё при-
бавить r .

$\triangle ABC$:

наведём BH .

BH - медиана, высота

$$BH = 2\sqrt{3}r$$

O - точка пересечения
медиан (ортоцентр) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OB = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}r, OH = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}r$$

$$\triangle POB: OB = \frac{4}{3}\sqrt{3}r = 4r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} +$$

$$PB = \sqrt{OB^2 + OH^2} = 2\sqrt{3}r = 4r$$

$$PO = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = 2\sqrt{3}r \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$$

H_2 - центр описанной
сферичности

Тогда пусть $OH_2 = \frac{4}{3}r$

$$\Rightarrow H_2B = PH_2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = 2\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

Лист 4 из 6

$$\Rightarrow OH_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot r \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}r \Rightarrow PH_2 = 2\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{2} - x$$

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{8} - \frac{2\sqrt{5}}{3}x + x^2$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OH_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot r \cdot 2\sqrt{3} =$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



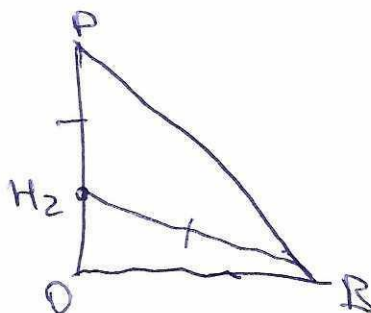
№6 (продолжение)
Δ AOB:

Бланк олимпиадной работы

$$PB = 4r$$

$$OB = 4r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$PO = \sqrt{(4r)^2 - (4r)^2 \cdot \frac{1}{3}} = 4r \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$



$PH_2 = BH_2$, где H_2 - центр вписанной окружности

Пусть $OH_2 = 4r\alpha$, $PH_2 = H_2B$

$$\Rightarrow 4r \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \alpha\right) = \sqrt{(4r)^2 \cdot \frac{1}{3} + (4r)^2 \alpha^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} - \alpha = \sqrt{\frac{1}{3} + \alpha^2}$$

$$\text{знаем } POH = \sqrt{3}r + r = 5\sqrt{2} + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} - 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha + \alpha^2 = \frac{1}{3} + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$PH_2 = 4r \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right) =$$

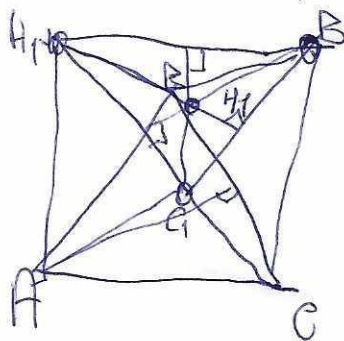
$$= \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} =$$

$$+ = \underline{\underline{6r}}$$

Бланк олимпиадной работы

$$PH_2 = \frac{2}{3} \sqrt{3} r \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) = \frac{38}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} r = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} r \Rightarrow r_{оп} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 1 \right) r = 5\sqrt{5} + 5$$

Вокз A, A_1, B, B_1, C, C_1 - центры шаров



которые касаются внешнего шара

- все ребра $2r$

Найти: $r_{оп}$?

$$r = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1}$$

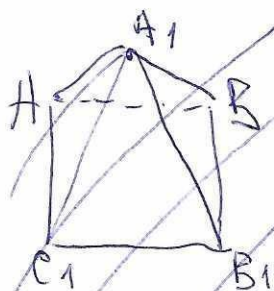
Из симметрии центры шаров

должны лежать на сферах H_1, H_2, AB_1

где H_1 - точка пересечения медиан ΔABC , H_2 - точка пересечения медиан $\Delta A_1B_1C_1$

Тоже расстояние равно половине AB_1 , т.к. ортосмита AB_1

Поскольку симметрично относительно плоскости AB_1C_1 то $A_1H_1 = A_1H_2$



Найдём расстояние PH_2

$\angle H_1 A H_2$:

$$3r^2 + 3r^2 - 2 \cdot 3r^2 \cdot \cos \alpha = 4r^2$$

$$6r^2 (1 - \cos \alpha) = 4r^2$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Проверим

$A_1 H_1 \in \Delta A_1 B B_1$

и $A_1 H_2 \in \Delta A_1 A C_1$

$$A_1 H_2 = A_1 H_1 = \sqrt{3} r$$

$\Delta A_1 H_1 H_2$:

$$H_1 H_2 = 2r$$



Поскольку $AB_1B_1C_1$ - квадрат

(в силу симметрии, т.к. ортосмита) $AB_1 = 2\sqrt{2} r \Rightarrow$

$$\frac{AB_1}{2} = \sqrt{2} r$$

$$r_{оп} = r(\sqrt{2}-1) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{5} + 1 = 0$$

$$0 = \sqrt{5}-1 \text{ Ответ: } \sqrt{5}-1$$