

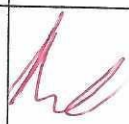
Бланк олимпиадной работы

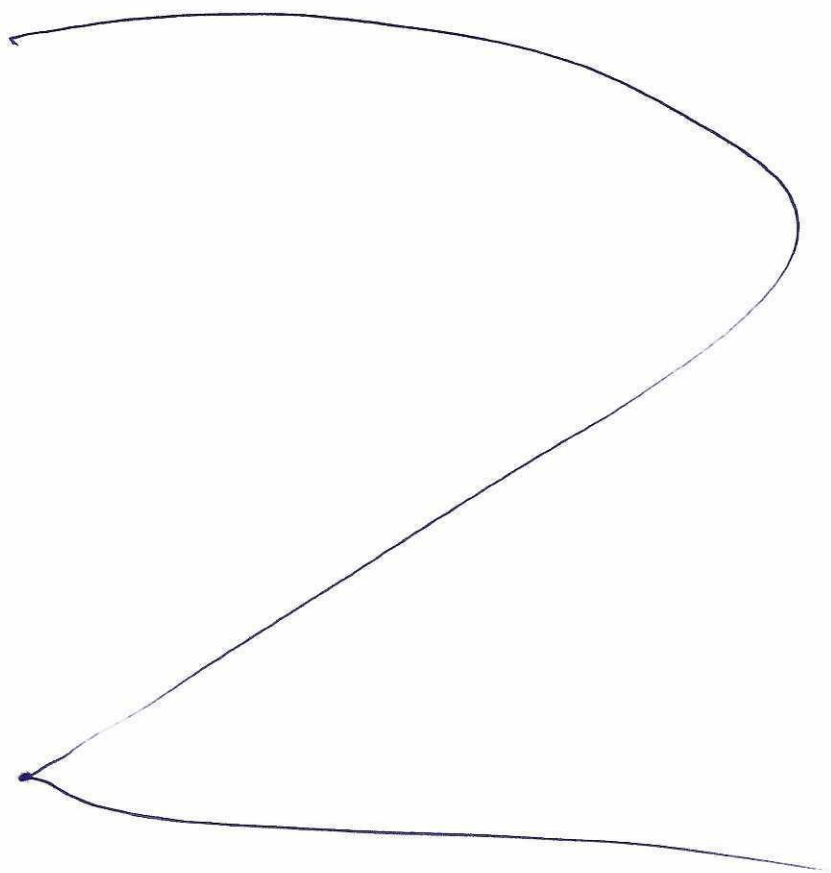
Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.08.23

Площадка написания _____

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	15	0	20	0					45	сорок пять	



Бланк олимпиадной работы

$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} \stackrel{!}{=} \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6}$, сделаем замену $t = \frac{a}{2}$,
 $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$, тогда $t^6 + \frac{1}{t^6} - ?$,
 $t - \frac{1}{t} = 3$
 $t^6 + \frac{1}{t^6} = t^6 + \frac{1}{t^6} - 2 + 2 = \left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right)^2 + 2 = \left(t^3 - 3t + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^3} + 3t - \frac{3}{t}\right)^2 + 2$
 $= \left(\left(t - \frac{1}{t}\right)^3 + 3\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)^2 + 2$, значит, что $t - \frac{1}{t} = 3$, подставим
 $(3^3 + 3 \cdot 3)^2 + 2 = (27 + 9)^2 + 2 = 36^2 + 2 = 1298$ - искомое ✓
 число, так как и условие и вопрос мне выразили через t

Заметим

✓2

- 1) заметим, что OC - биссектриса $\angle KCM \Rightarrow \angle OCM = 36^\circ$

- 2) проведем касательную к кас. AD и AD , заметим что $O'B'A$ - квадрат со стороной r тогда

Дано: окружность, $ABCD$ - квадрат, $AB = 2 - \sqrt{5} - \sqrt{5} = a$ см, KCM - кас.; $\angle KCM = 72^\circ$, найдем: r

применим $\Rightarrow OC^2 = (OA' + AD)^2 + B'B^2$, $OA' = r - a$, так $B'A = r$, $BA = a$
 $OC^2 = (r+a)^2 + (r-a)^2$, с другой стороны, приравняв DMC - прямоугольный треугольник
 $\angle OCM = 36^\circ = \alpha \Rightarrow r = OC \cdot \sin \alpha$, заметим, что DMC - прямоугольный треугольник
 $\begin{cases} OC^2 = (r+a)^2 + (r-a)^2 \\ r = OC \cdot \sin \alpha \end{cases}$

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} OC^2 = r^2 + a^2 \\ r^2 = a^2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

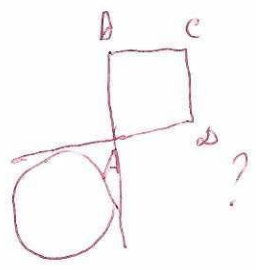
$$\begin{cases} OC^2 = 2OC^2 \sin^2 \alpha + a^2 \\ OC^2 = \frac{a^2}{1 - 2\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$OC = \frac{a}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \alpha}}$$

$$\begin{cases} OC = \frac{a}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \alpha}} \\ r = OC \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \alpha}} \cdot \sin \alpha$$

$$r = \frac{(2 - \sqrt{5} - \sqrt{5}) \sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2} \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5}}} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 5 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{5}}} =$$



$$= \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 5}{2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 5)}{2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{5}}} =$$

(5)

$$= \frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}$$

ответ: $r = \frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}$

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 672 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 198 = 0 \\ z^2 - 22x + 64y + 505 = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{3}$

Сложим все уравнения, получим:

$$x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 1413 = 0$$



$$(x^2 + 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 + 46z + 23) = 0$$

(15)

$$(x + 20)^2 + (y + 22)^2 + (z + 23)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = -22 \\ z = -23 \end{cases}$$

Каждое из слагаемых $\geq 0 \Rightarrow$ сумма левых частей
равна нулю, когда каждое слагаемое равно нулю

Ответ: $x = -20; y = -22; z = -23$ ✓

Бланк олимпиадной работы

$k \in [3; 8]$

15

$(k^2 - 2k - 3)x^2 - (3k - 5)x + 2 = 0$, решим уравнение

$D = (3k - 5)^2 - 4(k^2 - 2k - 3) \cdot 2 = (k - 7)^2$ относительно x

$$x = \frac{-2k - 2}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-1}{k-3}$$

$$x = \frac{-4k + 12}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2}{k+1}$$

перемножим по частям
 $k^2 - 2k - 3 = 0$
 $k^2 + k - 3k - 3 = 0$
 $(k+1)(k-3) = 0$

1 случай

$x_1 = \frac{-1}{k-3}$, тогда $\frac{-1}{k-3} \leq \frac{-4}{k+1} \cdot -1$

$x_2 = \frac{-2}{k+1}$

$\frac{-1}{k-3} \geq \frac{-4}{k+1} \cdot -1$

$\frac{k+1 - 4k + 12}{(k-3)(k+1)} \geq 0 : 3$

$\frac{-k + 13}{3} \geq 0 \quad k \geq \frac{13}{3}$
 $\frac{-k + 13}{3} \leq 0 \quad k \leq \frac{13}{3}$

2) случай

$x_1 = \frac{-2}{k+1}$

$x_2 = \frac{-1}{k-3}$

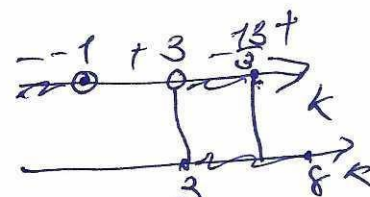
$\frac{-2}{k+1} \leq \frac{-2}{k-3} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-3} \leq 0$

$\frac{k-3 - k + 7}{(k+1)(k-3)} \leq 0 : \frac{1}{2}$

$\frac{4}{(k+1)(k-3)} \leq 0$

$p = \frac{13}{3}$
 $= \frac{4}{3} = \frac{4}{1.5}$



$1/3 k \leq \frac{13}{3}$
 тогда $p = \frac{n}{m}$, где n - делитель, а m - все остальное
 Лист 8 из 8

$\Rightarrow$, по т. ... k чётное число

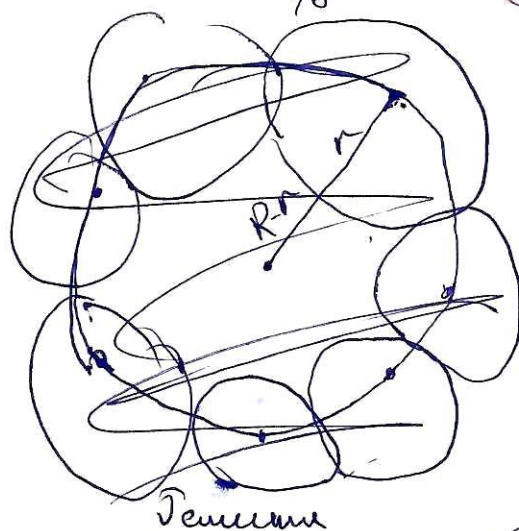
Бланк олимпиадной работы

$n = \frac{13}{3} - 3$, так как $P(k = \frac{13}{3}) \rightarrow 0$ можно
 взять эту точку

$$h = \frac{4}{3}$$

$$m = \cancel{28} \cancel{26} 8 - 3 = 6 \quad P = \frac{4}{3 \cdot 6} = \frac{4}{18}$$

Ответ: $P = \frac{4}{18} \checkmark$ (20)



Дано: $R = 20$, $r = 26$, $n = 3$
 найти: $S_{\text{ков}}$

$$S = \pi R^2 - \pi(R-r)^2 = \pi(2rR - r^2)$$

$$R =$$

$$R - r \geq 20$$

$$R - r \leq$$



? ϕ

