

ШИФР 105079

0123456789

Бланк олимпиадной работы

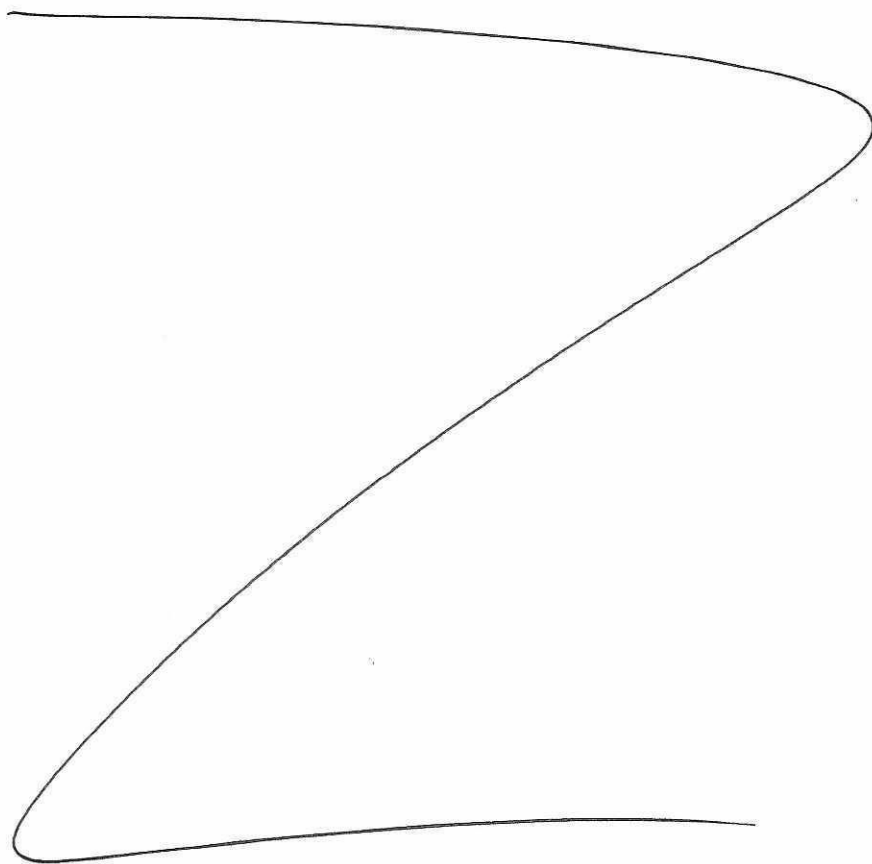
Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания Борь МГТУ имени Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	4	20	0					54	пятьдесят четыре	



Бланк олимпиадной работы

№1

1) $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \quad a \neq 0 \quad 1) \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6}$

2) $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \quad \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 = 9 = \frac{a^2}{4} - 2 + \frac{4}{a^2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 11$

3) $\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 11 \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$ перемножим выражения

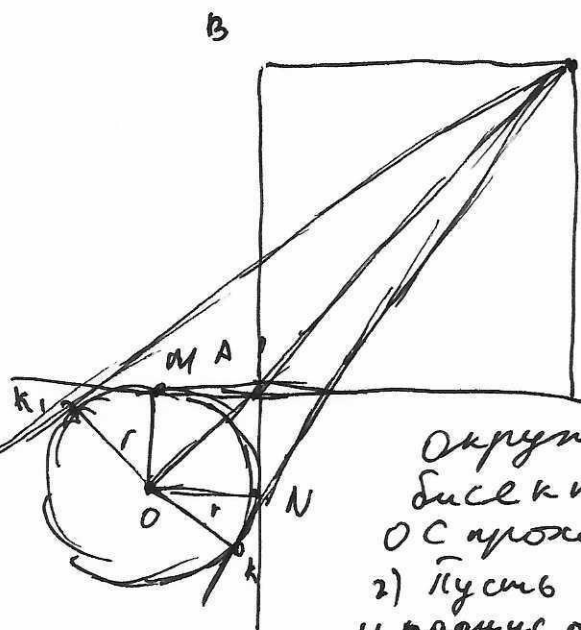
$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right) = 11 \cdot 3 = \frac{a^3}{8} + \frac{2}{a} - \frac{a}{2} + \frac{8}{a^3} = \frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3} - \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right) \Rightarrow$

$33 = \frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3} - \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right) = \frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3} - 3 \Rightarrow \frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3} = 36$

4) возведём $\frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3}$ в квадрат

$\left(\frac{a^3}{8} - \frac{8}{a^3}\right)^2 = \frac{a^6}{64} - 2 + \frac{64}{a^6} = 36^2 \Rightarrow$

$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 36^2 + 2 = 1296 + 2 = 1298$ Ответ: 1298



Дано: ABCD - квадрат
СК и СК₁ - касательные к
окружности.
Окружность с центром O касается
AD и AB; $AB = 2\sqrt{5-5\sqrt{5}}$
 $\angle K, \angle K = 72^\circ$; $\sin 36 = \frac{\sqrt{5-5\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

1) Проведём OC, т.к.

Окружность вписана в угол, то OC -
биссектриса угла K, CK $\Rightarrow \angle BCO = \angle OCD = 45^\circ \Rightarrow$
OC проходит через (-) A

2) Пусть окружность кас AD в |) M, а AB в |) N
и радиус окружности = r

3) т.к. OM = ON; $\angle OMA = 90^\circ$ - т.к. AD - кас
 $\angle ONA = 90^\circ$ т.к. AB - кас $\angle MAN = 90^\circ = \angle BAC$ - вер. $\angle$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

105079

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$\Rightarrow$ $OKAK$ - квадрат $\Rightarrow$ по теор. Пифагора $OA = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$

4) Пусть сторона квадрата $= a \Rightarrow AC$ по теор.

$$\text{теорема} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow OC = \sqrt{2}r + \sqrt{2}a$$

т.к. OC - биссектриса $\angle K_1CK \Rightarrow \angle OCK = 36^\circ$ т.к.

$$CK - \text{кас} \Rightarrow OK \perp CK \Rightarrow \sin \angle OCK = \frac{OK}{OC} = \frac{r}{OC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 36 = \frac{r}{OC} \Rightarrow r = \sin 36 \cdot OC = \sin 36 \cdot \sqrt{2}r + \sqrt{2}a \cdot \sin 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(1 - \sqrt{2} \sin 36) = \sqrt{2}a \cdot \sin 36 \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt{2}a \cdot \sin 36}{1 - \sqrt{2} \sin 36}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} = \frac{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

Ответ: $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ ✓ (10)

$\sqrt{5}$

$$k \in [3; 8] \quad (k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$$

D всегда $\geq 0 \Rightarrow$ при $k = 7$ - 1 корень т.к. $D = 0 \Rightarrow$ при $k \neq 7$ $D > 0$ и будет 2 решения

$$x = \frac{-3k + 5 \pm (k - 7)}{2(k^2 - 2k - 3)} \quad x_1 = \frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-k - 1}{(k + 3)(k + 1)}$$

$$x_2 = \frac{-4k + 12}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-2k + 6}{(k + 3)(k + 1)}$$

Ограничение
 $x \neq -1$ $x \neq 3$ т.к. при
 $x = -1$ или $x = 3$ $k^2 - 2k - 3 = 0$

$$1) x_1 \leq 2x_2 \Rightarrow \frac{-k - 1}{(k + 3)(k + 1)} \leq \frac{-4k + 12}{(k + 3)(k + 1)}$$

$$\frac{3k - 13}{(k + 3)(k + 1)} \leq 0$$

Бланк олимпиадной работы

$$\frac{3k-13}{(k-3)(k+1)} \leq 0 \Rightarrow k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$$

2) $x_2 \leq 2x_1$

$$\frac{-2k+6}{(k-3)(k+1)} \leq \frac{-2k-2}{(k-3)(k+1)} \Rightarrow \frac{8}{(k-3)(k+1)} \leq 0 \Rightarrow$$

$$k \in (-1; 3)$$

п.к. $k \in [3; \frac{13}{3}] \Rightarrow$ при $k \in (3; \frac{13}{3}]$ $x_1 \leq 2x_2$

т.к. при $k=3$ $k^2-2k-3=0 \Rightarrow$ выражение принимает вид $4x+2$ и имеет всего 1 решение

~~$8-3=5$ - длина диагонали~~ ~~вероятность $\frac{4}{5}$~~

$8-3=5$ - длина диагонали $[3; 8]$

$4\frac{1}{3}-3=1\frac{1}{3}$ - длина диагонали $[3; 4\frac{1}{3}]$

3-ке учитываем т.к. будет всего 1 корень

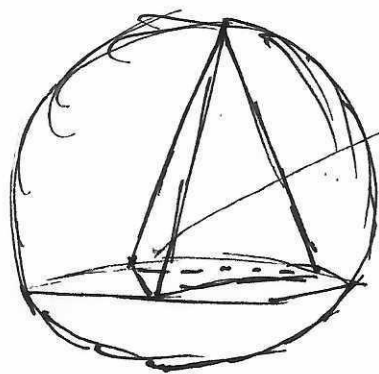
$$\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15} - \text{вероятность попасть в отрезок.}$$

Ответ: $\frac{4}{15}$ ✓ (20)

№ 6

Дано: радиус сферы описанной около пирамиды = $5\sqrt{2}+5$

1) Пирамида



$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{1) сложим} \\ \text{все уравнения} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 1413 &= 0 \\ (x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 &= 0 \quad \text{т.к. каждое из слагаемых} \geq 0 \text{ то} \\ (x+20)^2 = 0 \quad x = -20 \quad (y+22)^2 = 0 \quad y = -22 \quad (z+23)^2 = 0 \quad z = -23 \end{aligned}$$

Ответ: $x = -20; y = -22; z = -23$ ✓ (15)



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



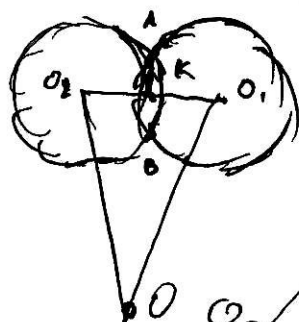
ШИФР

105079

0123456789

Бланк олимпиадной работы

III. к. радары будут распределены по кругу то
будет правильным $\neq \angle$ и Δ
будут одинаковыми рассмотрим 1 из них



$O_1O_2 = O_1O_2$ - расстояние

AB - перпендикуляр $(-A)$ и $(-B)$ - точки $\cap$ окружностей

$$AB = 20$$

$O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7$ - правиль $\neq \angle$

III. к. $O_1 - O_7$ - правиль $\neq \angle$ то

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2O_4 \Rightarrow$$

$$AB \cap O_2O_1 \text{ в } K \Rightarrow$$

$$O_2K = KO_1; \text{ и } AB \perp O_2O_1$$

$$AO_1 = BO_2 \Rightarrow AO_1 = BO_2 \Rightarrow$$

$$AK = KB; O_2K = KO_1; \angle AKO_1 = 90^\circ$$

по теор. Пифагора

$$KO_1 = \sqrt{26^2 - 100} = 24 \Rightarrow O_2O_1 = 24\sqrt{2}$$

