ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 104230

# Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им Баумана

## ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ Цифрой | Σ Прописью | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 5 | 10 | 15 | 10 | 20 | 0 | | | | | 60 | шестьдесят | |

1

$$\frac{a^{12}+2^{12}}{2^6a^6}=\frac{(2^4+a^4)(a^8-2^4a^4+2^8)}{2^6a^6}=\frac{a^4+2^4}{2^2\cdot a^2}\cdot\frac{a^8+2^8-2^4a^4}{2^4a^4}=$$

$$\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=3$$

$$9=\frac{a^2}{2^2}-2+\frac{4}{a^2}=\frac{a^4+2^4}{2^2a^2}-2$$

$$\frac{a^4+2^4}{a^2\cdot 2^2}=11$$

$$\frac{a^2}{2^2}+\frac{2^2}{a^2}=11$$

$$\frac{a^4}{2^4}+2+\frac{2^4}{a^4}=121$$

$$\frac{a^4}{2^4}+\frac{2^4}{a^4}=119$$

$$=11\cdot\left(\frac{(a^8+2^8)}{2^4a^4}-\frac{2^4a^4}{2^4a^4}\right)=$$

$$=11\left(\left(\frac{a^4}{2^4}+\frac{2^4}{a^4}\right)-1\right)=$$

$$=11\cdot(119-1)=11\cdot 118=$$

$$=1298$$

Ответ: 1298 V

5

# Бланк олимпиадной работы

(3)
$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2+\underbrace{40x}_{2\cdot 20\cdot x}+\underbrace{44y}_{2\cdot 22\cdot y}+\underbrace{46z}_{2\cdot 23\cdot z}+612+296+505=0$$

$$(x+20)^2+(y+22)^2+(z+23)^2+612+296+505-400-484-529=0$$

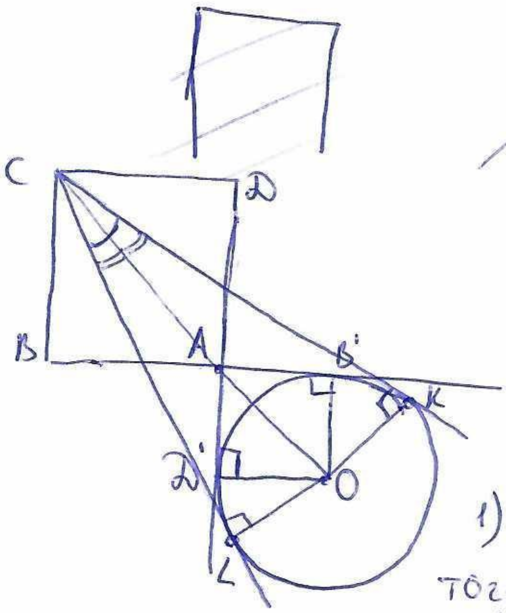
$$\underbrace{(x+20)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y+22)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(z+23)^2}_{\geq 0}=0$$

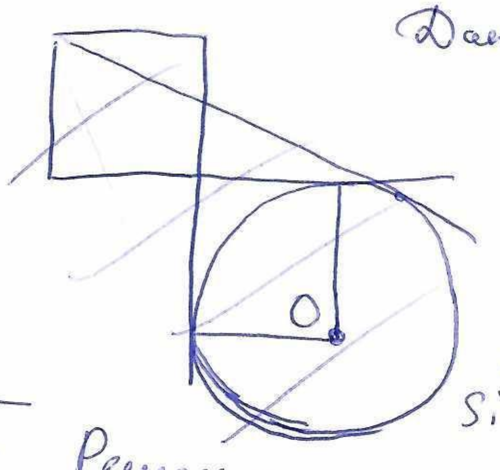
$$\begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

Ответ: $(-20; -22; -23)$

✓ 15

(2)




Дано: квадрат $ABCD$
$AB = 2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}$ см
окр. с ц. в т. $O$
$AD'$, $AB'$ – касат. к окр
$CK$, $CL$ – касат к окр
$\angle KCL = 72^\circ$
$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Решение:

1) Провед биссектрису $\angle KCL$ – $CO$, тогда $\angle KCO = 36^\circ = \angle LCO$. $\triangle CKO$ – п/уг (т.к. $CK$ – касат)

$\sin 36^\circ = \sin\angle KCO = \dfrac{KO}{CO}$

Пусть $KO = r$ (искомый радиус)

$CO = CA + AO$. $CA$ – диагональ квадрата $\Rightarrow CA = \sqrt{2}AB$

$AB'OD'$ – квадрат, : $\angle B'AD' = \underset{(\text{касат})}{\angle OB'A} = \underset{(\text{касат})}{\angle OD'A} = 90^\circ$ и $D'O = B'O$

Тогда $AO$ – диагональ квадрата $AB'OD' \Rightarrow AO = \sqrt{2}AB'$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**ШИФР** 104230

0123456789

# Бланк олимпиадной работы

② (продолжение)

$$\begin{cases} AO=\sqrt{2}\,AB'=\sqrt{2}\,OB'=\sqrt{2}\,OK=\sqrt{2}\,r \\ AC=\sqrt{2}\,AB=\sqrt{2}\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) \\ KO=r \\ \sin 36^\circ=\frac{KO}{CO} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\frac{r}{\sqrt{2}\left(2+2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}$$

$$2r=\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(r+2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

$$r\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)=\left(2-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$r=\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

Ответ: $\sqrt{5-\sqrt{5}}$. V 10

⑤ $k\in[3;8]$

p - вероятность выполнения условия $x_1\le 2x_2$

p - ?

$$(k^2-2k-3)x^2+(3k-5)x+2=0$$

$$(k-3)(k+1)x^2+(3k-5)x+2=0$$

при $k=3$ уравнение - линейное (1 корень) $\Rightarrow k\ne 3$

$k\ne 3$:

$$D=9k^2-30k+25-8k^2+16k+24=k^2-14k+49=(k-7)^2\ge 0$$

Для того, чтобы корней было 2, $D>0\Rightarrow k\ne 7$

$$x=\frac{5-3k\pm(k-7)}{2(k-3)(k+1)}$$

Бланк олимпиадной работы

5 (продолжение)

$$x_1' = \frac{-2-2k}{2(k-3)(k+1)}$$

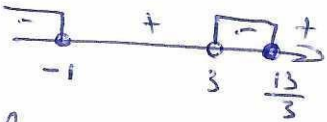
$$x_2' = \frac{12-4k}{2(k-3)(k+1)}$$

$x_1 \le 2x_2$. Рассмотрим 2 случая:

1) $x_1' \le 2x_2''$

$$\frac{-1-k+4k-12}{(k-3)(k+1)} \le 0$$

$$\frac{3k-13}{(k-3)(k+1)} \le 0$$




$$\begin{cases} k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] \\ k \in [3; 8] \end{cases}$$

$k \in (3; \frac{13}{3}]$

$x_2'' \le 2x_1'$

$$\frac{6-2k+2+2k}{(k-3)(k+1)} \le 0$$

$$\frac{1}{(k-3)(k+1)} \le 0$$


$$\begin{cases} k \in (-1; 3) \\ k \in [3; 8] \end{cases}$$

$\{k\} = \varnothing$

$$p = \frac{\left(\frac{13}{3}-3\right)}{(8-3)} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$$

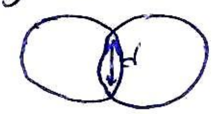
Ответ: $\frac{4}{15}$ V (20)

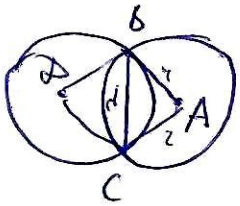
Бланк олимпиадной работы

4

Для получения кольца с шириной меньшей чем радиус радара, необходимо расположить их так, чтобы один круг радара пересекался с другим:

где $d$ – ширина получаемого кольца ($d=20$)





$r$ - радиус радара ($r = 26$)

$$\frac{AD}{r} = \sin\angle ACB \cdot r = \sqrt{1-\cos^2\angle ACB}\cdot r =$$

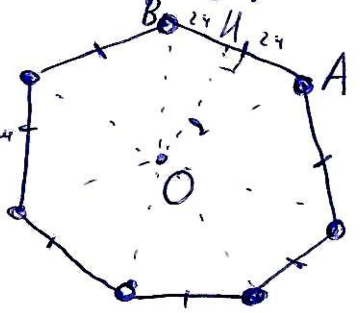
$$= \sqrt{1-\frac{\frac{d}{2}}{r}}\cdot r = \frac{12}{13}r$$

$$AD = \frac{24}{13}r = \frac{24}{13}\cdot 26 = 48$$

Если соединить все радары получится правильный семиугольник.

со ~~ст~~стороной $\cancel{\frac{24}{13}}$ 48км

(т. O - центр платформы)



$\angle AOB = \frac{360^\circ}{7}$

$R = AO$

$\angle AOH = \frac{180^\circ}{7}$

$\sin\angle AOH = \frac{AH}{AO} = \frac{24}{R} = \sin\frac{180^\circ}{7}$

$R = \frac{24}{\sin\frac{\pi}{7}}$ V

$S = ?$ 10