

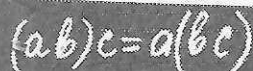


ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

105683

0123456789



$E=mc^2$



Бланк олимпиадной работы

11

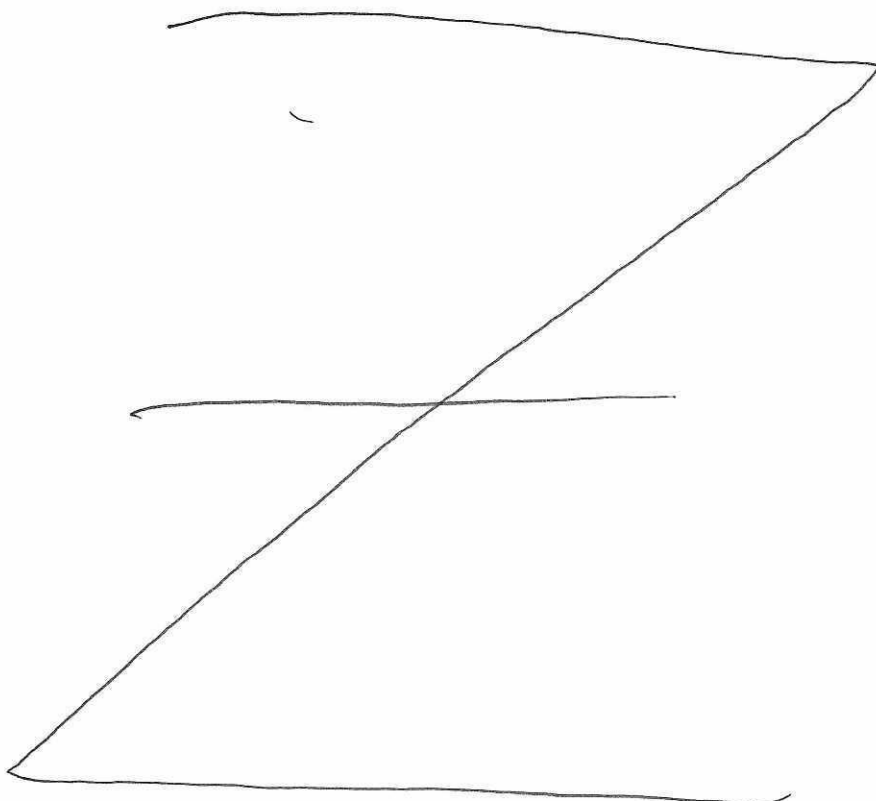
Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания ГЗ Багмача МГТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	0	20	18	0					53	пятьдесят три	



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^8} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 11$$

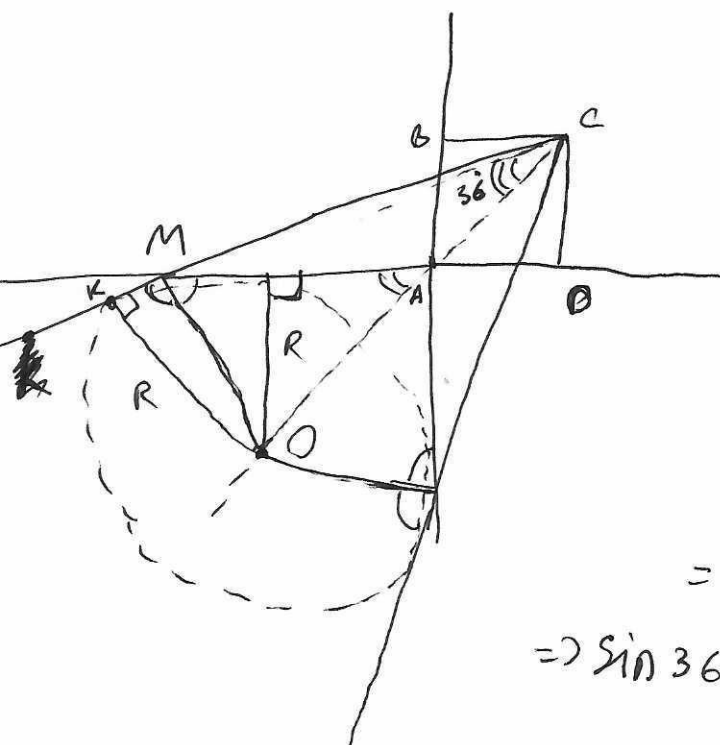
$$\left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{a} \right)^2 \right)^3 = 11^3 = 1331$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{a}\right)^2 = 1331$$

$$3\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) = 33$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 1298 = \frac{a^{12} + 4036}{64a^6}$$

OTter: $\frac{a^{12} + 4096}{64 a^6} = 1298 \quad \checkmark \quad (5)$



n 2

О-центр окружности, диаметр на пересечении биссектрис AC и MO угла AMK. Тогда перпендикуляр из O на ~~BM~~ CM- радиус, обозначим за R.
 $\angle MCA = \angle \text{до } 72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$

$$CO = AC + AO = \frac{1}{\cos 45^\circ} (R + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})$$

$$36^\circ = \frac{KO}{CO} = \frac{R}{\frac{1}{\cos 45^\circ} (R + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



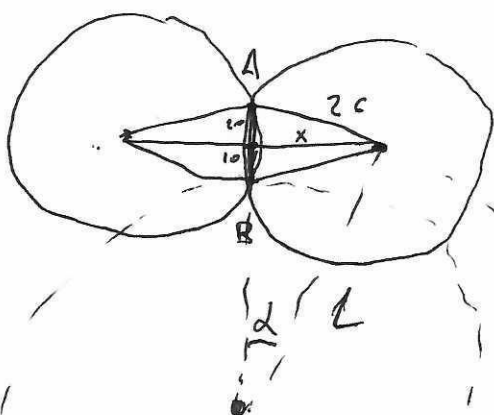
Бланк олимпиадной работы

$$\sqrt{2} \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} (R + 2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}) = R$$

$$R \left(1 - \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}\right) = \sqrt{5-\sqrt{5}} \left(1 - \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

Ответ: $R = \sqrt{5-\sqrt{5}}$ ✓ (10)



N 3 4
два круга радиусов 20
пересекаются, что AB на рисунке = 20.

$$\Rightarrow x = \sqrt{26^2 - 20^2} = 24 \checkmark$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{14} = \frac{180^\circ}{7}$$

$\Rightarrow L$ - максимальное расст.

$$L = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{24}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$$

$$S_{\text{кольца}} = S_{\text{в}} - S_{\text{м}} = \pi \left(\left(\frac{x}{\sin \frac{180^\circ}{7}} \right)^2 - \left(\frac{x}{\sin \frac{180^\circ}{7}} - 20 \right)^2 \right)$$

$$= \frac{360\pi}{\tan \frac{180^\circ}{7}}$$

Ответ: $L = \frac{24}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$; $S = \frac{360\pi}{\tan \frac{180^\circ}{7}}$ ✓

(20)



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

105687

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$$x_{1,2} = \frac{5-3k \pm \sqrt{(3k-5)^2 - 2(k^2-2k-3)}}{2(k^2-2k-3)}$$

$$= \frac{5-3k \pm (k-7)}{2(k^2-2k-3)}$$

Т.к. при $k \in [3; 8]$ $3k-5 > 0$ и $k^2-2k-3 \geq 0$,
то числитель и знаменатель имеют корни.

$$\begin{cases} \frac{5-3k-k+7}{2(k^2-2k-3)} \leq \frac{5-3k+k-7}{k^2-2k-3} \\ 8 \geq k \geq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5-3k+k-7}{2(k^2-2k-3)} \leq \frac{5-3k-k+7}{(k^2-2k-3)} \\ 3 \leq k \leq 7 \end{cases}$$

можно обратить на k^2-2k-3 , т.к. всегда
больше нуля.

$$\begin{cases} 6 \leq -2 \\ 8 \geq k \geq 7 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} k \leq 4\frac{1}{3} \\ 3 \leq k \leq 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 2x_2 \text{ при}$$

$$3 \leq k \leq 4\frac{1}{3}, \text{ при}$$

$$4\frac{1}{3} < k \leq 8 \text{ условие не}$$

тогда P-вероятность, P =

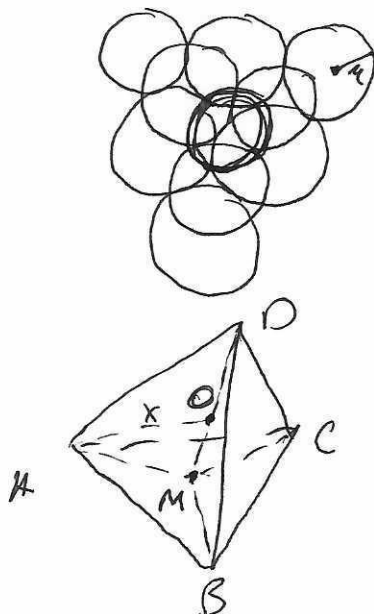
$$P = \frac{4\frac{1}{3} - 3}{8 - 4\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

Ответ: $P = \frac{4}{11}$

(18)

Бланк олимпиадной работы

№ 6



Рассмотрим четыре ~~сферы~~ ^{крайних} шаров. ~~А, В, С, D — их центры.~~

~~М — центр шаров~~

~~Тогда $AO + 2r = MO + r$~~

~~М — центр ABC~~

$$AM = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} = 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

$$AO = OR, \text{ т.к. } O \text{ — центр } AD$$

$$MD = \sqrt{(24)^2 - \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} r$$

$$AO = \sqrt{AM^2 + OM^2} = MD - MO$$

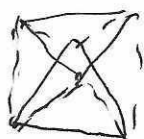
$$2\sqrt{\frac{2}{3}} r - r = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} r\right)^2 + r^2}$$

$$\frac{8}{3} r^2 - 4\sqrt{\frac{2}{3}} r^2 = \frac{4r^2}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{6}} r$$

$4 + MD$ — разность ~~данных~~ ^{данных} и ~~исходного~~ ^{исходного} радиуса

$$MD = 2\sqrt{\frac{2}{3}} r + r = r \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right)$$

Рассмотрим ~~правильный~~ ^{правильный} ~~тетраэдр~~ ^{тетраэдр} ~~с 6 центральными сферами~~ ^{с 6 центральными сферами} ~~всего 11 шаров~~ ^{всего 11 шаров}



$$\text{Тогда радиус большой сферы } 5\sqrt{2} + 5 =$$

$$\Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2} + 5}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Бланк олимпиадной работы

Тогда радиус искомого $\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
 R &= 4 + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\right)^2} = \\
 &= 4 + \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot 4 = 4 \left(1 + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) = \\
 &= \frac{5(\sqrt{2}+1) \left(1 + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}}
 \end{aligned}$$

ответ: $R = \frac{5(\sqrt{2}+1)(2\sqrt{3}+5)}{2\sqrt{3}+3+4\sqrt{2}}$

$(\sqrt{6}-1)$

