

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

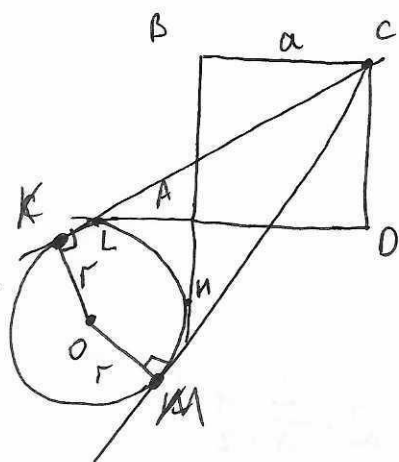
Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

(заполняется проверяющим)														
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись	
											Цифрой	Прописью		
Оценка	5	10	15	16	20	0						66	шестьдесят шесть	

N2



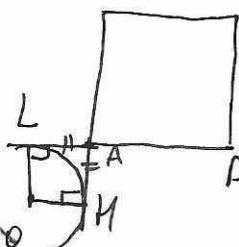
1) Пусть сторона квадрата $ABCD = a$,
а радиус окружности r .

Пусть SK и SM - касательн. из точки S к окружности.

ОК $\perp$ СК и ОМ $\perp$ СМ (радиус, пров. в точку касания)

отрезки касат. из точки А к окружности

В С Также равны



2) AL и AN - касат. $AL = AN$. т.к. $\angle LAN = 90^\circ$ (вертик. сумма кут.) и $\angle OLA = 90^\circ$ (радиус в точку касания)
 $OLAN$ - квадрат со стороной r .

OA - диагональ квадрата; $OA = \sqrt{2}r$
 $\angle OAL = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (диаг. - биссектр.)

3) AC - диагональ квадрата $ABCD \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$
 $\angle CAB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (диаг. - биссектр.)

из п. 2 и 3 следует, что точки $O; A; C$ лежат на одной прямой. $\angle OAC = \angle OAL + \angle LAB + \angle BAC = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

4) рассмотрим $\triangle SOM$

Лист 1 из 6

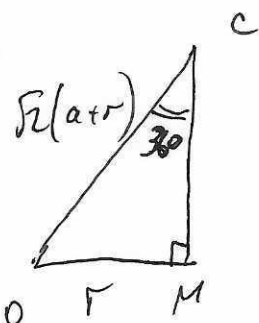


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы



$$OM = r; OC = \sqrt{2}r + \sqrt{2}a$$

б) CO - биссектриса $\angle KCM = 72^\circ$ (из равных треугольников и равных сторон)

$$\Rightarrow \angle OCM = \frac{\angle KCM}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$б) \sin \angle OCM = \sin 36^\circ = \frac{OM}{CO} = \frac{r}{\sqrt{2}(a+r)}$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}(a+r)} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$2r = (a+r) \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$r(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}) = \sqrt{5-\sqrt{5}} \cdot (2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})$$

$$r = \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{Ответ: } r = \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

сложим все 3 ур-ие:

$$(x^2 + 40x + 400) - 400 + (y^2 + 44y + 484) - 484 + (z^2 + 46z + 529) - 529 + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$-400 + (-484) - 529 + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

$$(x+20)^2 \geq 0$$

$$(y+22)^2 \geq 0$$

$$(z+23)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ раз сумма равна 0, то

$$(x+20)^2 = 0$$

$$(y+22)^2 = 0$$

$$(z+23)^2 = 0$$

$$x = -20$$

$$y = -22$$

$$z = -23$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -20 \\ y = -22 \\ z = -23 \end{cases}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0 \quad \sqrt{D}$$

$$D = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$$

$$\sqrt{D} = |k - 7|$$

$$x_1 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-2k - 2}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-1}{k - 3}$$

$$k \neq 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-4k + 12}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2}{k + 1}$$

$$k \neq -1$$

по условию $k \in [3; 8]$

при $k \in (3; 8]$ $x_1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$

при $k \in [3; 8]$ $x_2 \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{2}{9}\right]$

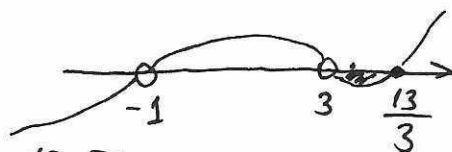
$$\begin{cases} x_1 \leq 2x_2 \\ x_2 \leq 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{k-3} \leq \frac{-4}{k+1} \\ -\frac{2}{k+1} \leq \frac{-2}{k-3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{k-3} \geq \frac{4}{k+1} \quad (1) \\ \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{k-3} \quad (2) \end{cases}$$

рассмотрим 1е неравенство:

$$\frac{k+1}{(k-3)(k+1)} \geq \frac{4(k-3)}{(k-3)(k+1)}$$

$$\frac{k+1 - 4k + 12}{(k-3)(k+1)} \geq 0$$

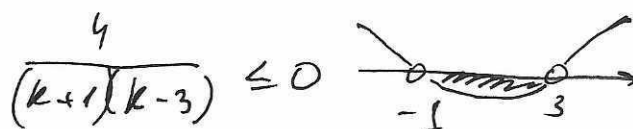
$$\frac{-3k + 13}{(k-3)(k+1)} \geq 0 \quad \frac{3k - 13}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$



при $k \in [3; 8]$ решение $k \in \left(3; \frac{13}{3}\right]$

рассмотрим 2е неравенство:

$$\frac{k-3 - k-1}{(k+1)(k-3)} \geq 0 \quad \frac{-4}{(k+1)(k-3)} \geq 0$$



при $k \in [3; 8]$ решений нет.

значит, удовлетворяющие условию $k \in \left(3; \frac{13}{3}\right]$ - отрезок длины $\frac{4}{3}$

Бланк олимпиадной работы

Вероятность попадания: $\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15} \checkmark$ (20)

№1

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{3 \cdot a^2 \cdot 2}{4a} + \frac{3 \cdot a \cdot 4}{2 \cdot a^2} - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{a} - \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3(-3) - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = 3^3$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3 - 9 = 27$$

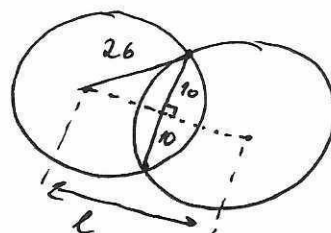
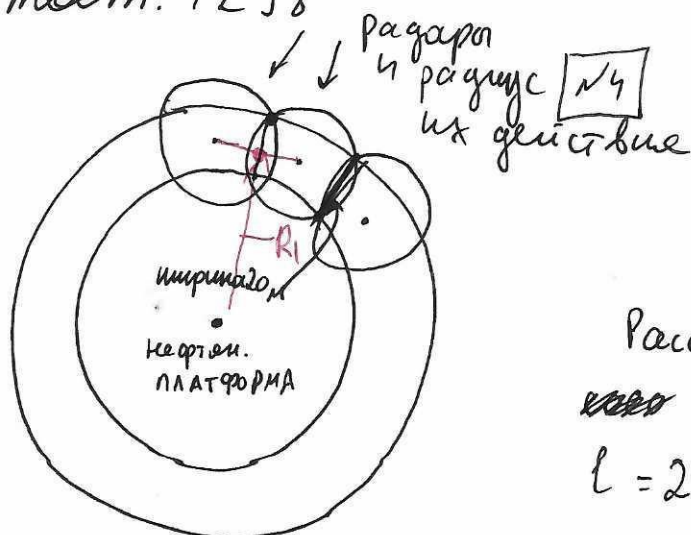
$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = 36$$

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^6 - 2 \cdot \frac{a^3 \cdot 2^3}{2^3 \cdot a^3} + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 36^2 = 1296$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 1296 + 2 = 1298 \checkmark$$
 (5)

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 1298$$

Ответ: 1298

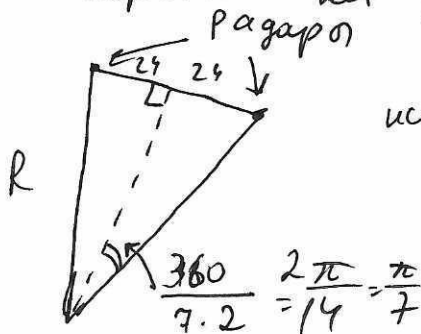
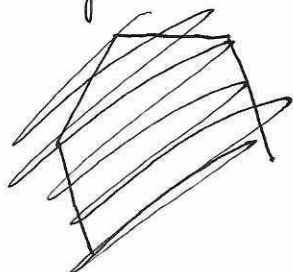


Расстояние между центрами соседних радаров

$$l = 2\sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \cdot 2 = 48 \checkmark$$

Бланк олимпиадной работы

Т.е. центры радаров будут образовывать правильный септугольник со сторонами ~~48~~ 48



используем расстояние: R

$$\sin \frac{180}{7 \cdot 2} = \frac{24}{R}$$

$$R = \frac{24}{\sin \frac{180}{7 \cdot 2}}$$

Используем максимально возможное расстояние $R = \frac{24 \text{ км}}{\sin(\frac{180 \cdot 2}{14})}$

Площадь кольца:

~~$$S = \pi(R+20)^2 - \pi(R-20)^2 = \pi R^2 + 40\pi R + 400\pi - \pi R^2 + 40\pi R - 400\pi = 80\pi R$$~~

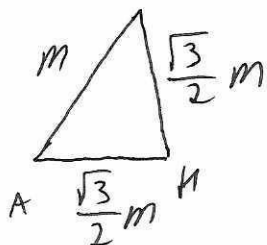
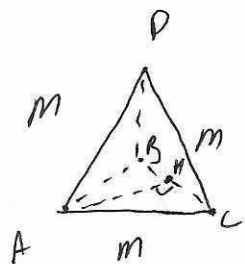
$$S = \pi(R+10)^2 - \pi(R-10)^2 = \pi R^2 + 20\pi R + 100\pi - \pi R^2 + 20\pi R - 100\pi = 40\pi R = 40\pi \cdot \frac{24}{\sin \frac{\pi}{7}} \text{ (км}^2\text{)}$$

Ответ: $R = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{7}} \text{ км}$; $S = 40\pi \cdot \frac{24}{\sin \frac{\pi}{7}} \text{ км}^2$

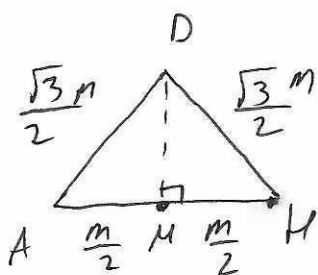
(16)

№6
~~Правильная пирамида со сторонами~~
 Центр шаров, как и шары, образуют пирамиду с равными сторонами.
 Пирамида, обр. центрами шаров, имеет сторону $a = 4r$, где r - радиус шара

Бланк олимпиадной работы



радиус описанной сферы
вокруг пирамиды равен
радиусу окружности, описанной
вокруг $\triangle ADH$ ($AK \perp BC$)



DM - высота

$$DM^2 = \frac{3}{4} m^2 - \frac{m^2}{4} = \frac{2}{4} m^2 = \frac{1}{2} m^2$$

$$DM = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

$$S_{ADM} = \frac{\sqrt{2}}{2} m \cdot \frac{m}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} m^2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot m^3}{4R}$$

где R - радиус описанной.

$$\sqrt{2} m^2 = \frac{3 m^3}{4R}$$

$$m = \frac{4\sqrt{2} R}{3}$$

радиус вписанной в пирамиду сферы равен радиусу
вписанной в $\triangle ADH$ окружности

$$S_{ADM} = \frac{\sqrt{2}}{4} m^2 = p \cdot r = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) m \cdot r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} m = (\sqrt{3} + 1) r \quad r = \frac{\sqrt{2} m}{2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} R}{2(\sqrt{3} + 1) \cdot 3} =$$

$$= \frac{4R}{3(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4(5\sqrt{2} + 5)}{(\sqrt{3} + 1) \cdot 3} = \frac{20(\sqrt{2} + 1)}{3(\sqrt{3} + 1)}$$

Ответ: $r = \frac{20(\sqrt{2} + 1)}{3(\sqrt{3} + 1)}$