

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	15	10	16	0					46	сорок шесть	<i>M</i>

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{(2a)^6} \quad \text{Пусть } \sqrt[6]{\frac{a^2}{2a}} = \left(\frac{a^2}{2a}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{6}}. \text{ Пусть } \frac{a}{2} = t, \text{ тогда}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{6}} + \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{6}} = t^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{t^{\frac{1}{6}}}; \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \Leftrightarrow t - \frac{1}{t} = 3. \text{ Возведём в квадрат.}$$

$$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 3^2$$

$$t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = 9$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = 11 \quad (\text{возведём в куб})$$

$$\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^3 = 11^3$$

$$t^6 + 3t^4 \cdot \frac{1}{t^2} + 3t^2 \cdot \frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^6} = 1331$$

$$t^6 + \frac{1}{t^6} + 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = 1331, \text{ а } t^2 + \frac{1}{t^2} = 11 \Rightarrow t^6 + \frac{1}{t^6} + 3 \cdot 11 = 1331 \Rightarrow t^6 + \frac{1}{t^6} = 1298 \Rightarrow \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = 1298.$$

Ответ: 1298. $\checkmark$ (5)

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases} \quad \sqrt{3} \quad (1)+(2)+(3)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим 1-е ур-ние:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413 &= 0 \\ (x^2 + 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 + 46z + 529) &= 0 \\ (x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ед. квадрат всегда больше или равен нулю $\Rightarrow$ сумма квадратов равна нулю тогда, когда каждый квадрат равен нулю $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (x+20)^2 = 0 \\ (y+22)^2 = 0 \\ (z+23)^2 = 0 \\ x = -20 \\ y = -22 \\ z = -23 \end{cases} \quad \checkmark \quad (15)$$

Ответ: ~~(-20, -22, -23)~~ $x = -20; y = -22; z = -23$.

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0 \quad \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} D &= (3k-5)^2 - 8(k^2-2k-3) = 9k^2 + 25 - 30k - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = \\ &= (k-7)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5-3k+k-7}{2(k^2-2k-3)}$$

ИЛИ

$$x_2 = \frac{5-3k-k+7}{2(k^2-2k-3)}$$

$$x_1 = \frac{5-3k-k+2}{2(k^2-2k-3)}$$

$$x_2 = \frac{5-3k+k+7}{2(k^2-2k-3)}$$

Бланк олимпиадной работы

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \Rightarrow \frac{5-3k+k-7}{2(k^2-k-3)} \leq 2 \cdot \frac{5-3k-k+7}{2(k^2-2k-3)}$$

$$\text{или} \frac{5-3k-k+7}{2(k^2-2k-3)} \leq 2 \cdot \frac{5-3k+k-7}{2(k^2-2k-3)}$$

$$\frac{-2(k+1)}{2(k+1)(k-3)} \leq \frac{4(3-k)}{(k+1)(k-3)}$$

$$\text{или} \frac{4(3-k)}{2(k+1)(k-3)} \leq \frac{-2(k+1)}{(k+1)(k-3)}$$

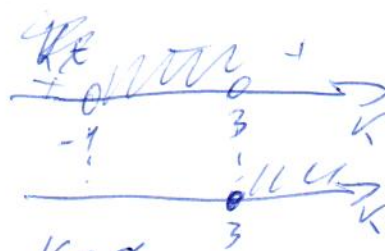
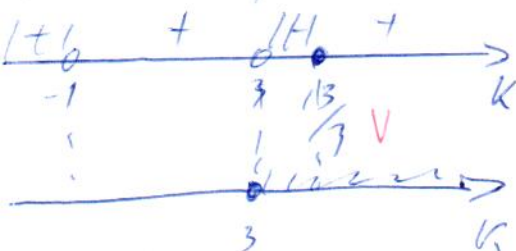
$$\frac{6-2k+2k+2}{(k+1)(k-3)} \leq 0$$

$$\frac{-k+1-12+4k}{(k+1)(k-3)} \leq 0$$

$$\frac{4}{(k+1)(k-3)} \leq 0$$

$$\frac{3k-13}{(k+1)(k-3)} \leq 0$$

$$(k+1)(k-3) \neq 0$$



$$k \neq \emptyset$$

$k \in (3; \frac{13}{3}] \Rightarrow$ длина $\frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3}$
 длина всего отрезка $\frac{16}{3} - \frac{9}{3} + 1 = \frac{16}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вероятность равна $\frac{4/3}{16/3} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25. $\frac{4}{15}$?

(16)

Бланк олимпиадной работы

Дано:

$V=26 \text{ км}$

$N=7$

$R=20 \text{ км}$

$R=?$

$S_{\text{покр.}}=?$

рис. 1

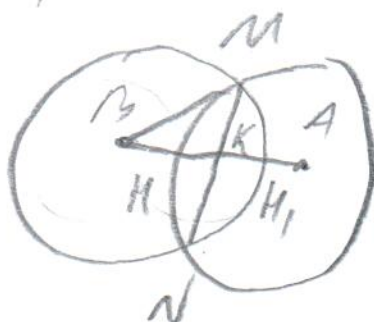
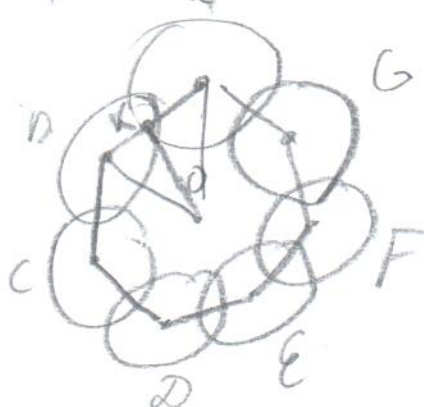


рис. 2



решение:

① Рассматривая 7 радаров получим правильный семиугольник со сторонами AB. Кольцо шириной 20 км $\Rightarrow$ Пусть $MM_1 = 20 \text{ км}$.

② Рассмотрим рис. 1:

AB проходит через середину $MM_1 \Rightarrow MK = M_1K = \frac{1}{2} MM_1 = 10$.

Рассмотрим $\triangle BKM$ - прямоугольный ($\angle K$, $AB \perp MM_1$):

BM - радиус $\Rightarrow BM = 26$

$MK = 10$

По $\triangle BKM$ по теореме Пифагора: $BK^2 = BM^2 - MK^2$

$BK = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$

$BK = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \Rightarrow \checkmark$

$\Rightarrow AB = 2BK = 48$.

③ Рассмотрим рисунок 2: правильный семиугольник $\Rightarrow$ сумма углов равна $180(n-2) = 900 \Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = \frac{900}{7}$

Рассмотрим $\triangle AOB$: $AO = BO$ - радиусы опис. окр-ти $\Rightarrow \triangle AOB$ - рб, $\angle BAO = \frac{1}{2} \angle AOB$ (т.к. AO - бисс.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAO = \frac{450}{7} = 64 \frac{2}{7}^\circ \checkmark$

Бланк олимпиадной работы

Опустим высоту OK в $\triangle AOB$, OK - медиана (по св-ву
реб-ка) $\Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB = 24$, $\triangle AOK$ - прямоугол. ($\angle AKO = 90^\circ$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos \angle OAK = \frac{AK}{AO} = \cos \angle OAD \Rightarrow AO = \frac{AK}{\cos \angle OAD} = \frac{24}{\cos(64\frac{1}{2}^\circ)} \Rightarrow R = \frac{24}{\cos(64\frac{1}{2}^\circ)}$

$$(4) S_{\text{покр}} = S_{\text{кр.}} \cdot 7 - S_{\text{перес.}} \cdot 7 = 7 \cdot (S_{\text{кр.}} - S_{\text{перес.}})$$

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = 676\pi \text{ км}^2$$

$$S_{\text{перес.}} = (S_{\text{сектора}} - S_{\text{тр-ка}}) \cdot 2$$

$\triangle OPQ$

$\triangle OPQ$ - прямоугол. ($\angle OQP = 90^\circ$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle POQ = 2 \arcsin\left(\frac{10}{26}\right) \Rightarrow \angle POQ = 2 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$

$$S_{\text{сектора}} = S_{\text{кр.}} \cdot \frac{2 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2\pi} \text{ км}^2$$

$$S_{\text{тр-ка}} = \frac{OQ \cdot PQ}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ км}^2$$

$$S_{\text{перес.}} = \left(676\pi \cdot \frac{2 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2\pi} - 120\right) \cdot 2 = 1352 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) - 240 \text{ км}^2$$

$$S_{\text{покр.}} = 7 \cdot (676\pi - 1352 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) - 240) \text{ км}^2$$

Ответ: $R = \frac{24}{\cos(64\frac{1}{2}^\circ)} \text{ км}$; $S_{\text{покр.}} = 7 \cdot (676\pi - 1352 \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) - 240) \text{ км}^2$

верно

(10)

Бланк олимпиадной работы

Найдём радиус
одного шарика.

т.к. радиус сферы

равен $R = \sqrt{4r^2 + v^2}$ (по т. Пифагора) $\Rightarrow$
 $v = \sqrt{\frac{R^2}{5}} = \frac{5\sqrt{2}+5}{\sqrt{5}}$

Радиус впис. шарика будет равен
так, что осевое сечение между

3 шарами $\Rightarrow r_0 = \frac{v}{2} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2\sqrt{5}} =$
 $= \frac{5\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)}{10} = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}+1}{2}$ - ?

№ 6

вид сбоку

вид сверху



рис 1



рис 2

