



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

120818

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	0					50	пятьдесят	

✓

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

(*) $a \neq 0 \Rightarrow$ можно делить на a

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = ? \text{ Пусть } t = \frac{a}{2}, \text{ тогда } t^6 + \frac{1}{t^6} - \text{искали число}$$

$$t^6 - \frac{1}{t^6} = 3$$

$$t^6 + \frac{1}{t^6} = \left(t^3 + \frac{1}{t^3} \right)^2 - 2 = \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right)^2 + 2$$

$$= \left(t^3 - \frac{1}{t^3} \right)^2 + 2 = \left[\left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2} \right) \right]^2 + 2 =$$

$$= \left[\left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 3 \right) \right]^2 + 2 = \left[3 \cdot (3^2 + 3) \right]^2 + 2 =$$

$$= 36^2 + 2 = 1296 + 2 = 1298$$

Answer: 1298

(5)

Лист 1 из 6



Бланк олимпиадной работы

№ 2

Дано: ABCD - квадрат

CH, CM - касательные

$$\angle MCN = 72^\circ$$

$$OH_2 \perp AD$$

$$OH_1 \perp AB$$

$$AB \leq 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}$$

Найти: OH_2 ?

Решение: OH_2AH_1 - квадрат. т.к. $OH_2 \leq OH_1 \leq R$

$$\angle OH_2A = \angle H_2AH_1 = \angle AH_1D = 90^\circ$$

$$\text{знаем: } OA = OH_2\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$

$$ON = R$$

OC - биссектриса $\angle NCM$ (т.к. O - равноудалена от сторон угла)

OC $\cap$ AB = A т.к. AO - биссектриса

А равно т.к. OA - биссектриса $\angle$ BAD $\Rightarrow H_2, OM$

знаем. A, O, C - на одной прямой.

$$\triangle NOC$$

$$NO \leq R \quad OC = R\sqrt{2} + (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})\sqrt{2}$$

$$OC \cdot \sin \alpha = NO$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$R \cdot (R + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \leq R$$

$$R\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} - 2 + 2 = R$$



Бланк олимпиадной работы

$$R + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

$$R \left(\frac{2}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} - 1 \right) = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} \quad R = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

к 3 Ответ: $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ ✓ (10)

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

сложим все 3 уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 46z + 44y + 615 + 296 + 505 = 0$$

преобраз. в полные квадраты

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

такое возможно только когда все слагаемые равны 0 (т.к. все они ≥ 0)

значит:

$$\begin{cases} x = -20 \\ y = -22 \\ z = -23 \end{cases}$$

- единственное решение системы

Ответ: $x = -20; y = -22; z = -23$ ✓ (15)



Бланк олимпиадной работы

$n = 5$
 $k \in [3; 8]$ найдем при каких k $x_1 \leq 2x_2$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$(k-3)(k+1) \quad k \neq -1 \quad (\text{по общ. вывед.})$$

Если $k = 3$ — система имеет только 1 решение $\Rightarrow k \neq 3$

Найдем D $D = (3k-5)^2 - 8(k^2-2k-3) = k^2 - 14k + 49 = (k-7)^2$
(наб. устроит только случаи, когда $D \geq 0$)

$$\begin{cases} x = \frac{-3k+5+k-7}{(k-3)(k+1)} \\ x = \frac{-3k+5-k+7}{(k-3)(k+1)} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{-2(k+1)}{(k-3)(k+1)} \\ x \leq \frac{-4(k-3)}{(k-3)(k+1)} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{-2}{k-3} \\ x \leq \frac{-4}{k+1} \end{cases}$$

т.к. $k-3 > 0$ и $k+1 > 0$, то

$$\frac{k-3}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{-2}{k-3} \leq \frac{-2}{k+1}$$

$\frac{-2}{k-3} \leq \frac{-4}{k+1}$ Тогда $x_1 \leq \frac{-2}{k-3}$ $x_2 \leq \frac{-4}{k+1}$

$$\frac{-2}{k-3} \leq \frac{-8}{k+1}$$

$$\frac{8(k-3) - 2(k+1)}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$

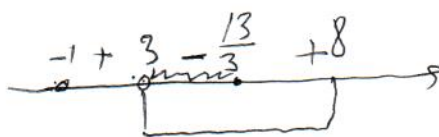
$$\frac{6k-26}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$

Бланк олимпиадной работы

$$f(x) \leq \frac{3k-13}{(k-3)(k-1)} \quad f(k) \leq 0$$

$$f(x) \leq 0 \quad \begin{cases} k \leq \frac{13}{3} \\ k \neq 3 \\ k \neq -1 \end{cases}$$

$$k \in (3; \frac{13}{3}]$$



Вероятность появления такого k равна $\frac{\frac{13}{3} - 3}{8 - 3} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$ ✓ (20)

и Б

ABCD-пирамида

10 шаров в ней касаются
каждому из них 3 шара

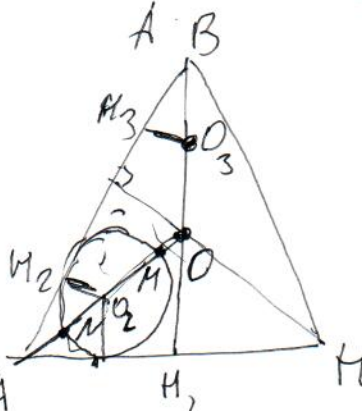
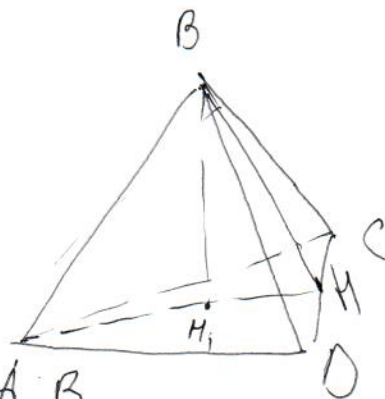
Реш. $5\sqrt{2} + 5 = AD$

Найти: $S = ?$; ON ; OB - центр.
отн. окр-ти

Решение:

ABCD-правильный тетраэдр.

значит (О - центр) лежит на BN , А
 BN - высота из B к основанию
точка A, B, C, D - ?



Бланк олимпиадной работы

н.к. $ABCO$ - правильный тетраэдр, то $BO \leq \frac{2}{3} BH_1$, $\leq R$

т.о. центр пересечения медиан

$$OH = \frac{1}{3} BH_1 \quad BH_1 = \sqrt{3}$$

$$AH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad a - \text{сторона основания}$$

$$AH_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$BH_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$R = \frac{2}{3} BH_1 \quad \text{т.к.} \quad R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}a}{9}$$

$$a = \frac{9R}{2\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{6}}$$

r - радиус маленького шара

$$AB = AH_1 + r + 2r + r + BH_1 \quad O_3, O_2 - \text{центры шаров}$$

$$\angle BAO \leq R^2 = a^2 + R^2 - 2 \cos \alpha \cdot aR \leq$$

$$2 \cos \alpha \cdot aR \leq a^2$$

$$\cos \alpha \leq \frac{a}{2R} \leq \frac{9}{4\sqrt{6}}$$

$$\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{96-9}}{4\sqrt{6}} \leq \frac{\sqrt{87}}{4\sqrt{6}}$$

$$a \leq 2r \cdot \tan \alpha + 4r \leq \frac{\sqrt{87}}{9} \cdot 10 \cdot 2 + 40 = 6$$

$$AO_2 = \sqrt{AH_1^2 + H_1O_2^2}$$

$$r = \frac{9R}{2\sqrt{6}} \cdot \left(4 + \frac{2\sqrt{87}}{9}\right)$$

$$AO = \sqrt{AH_1^2 + OH_1^2}$$

$$ON = AO - AO_2 + r \leq$$

? Ответ: 6