



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	18	10	0					58	пятьдесят восемь	

№1

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} - ? ; \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} \Rightarrow \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3, \text{ возведем в 3 степень}$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^3 = 27 \Rightarrow \left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - 2 + \left(\frac{2}{a}\right)^3\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right) = 27$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{a}{2} + 3 \cdot \frac{2}{a} - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = 27$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right) = 27$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = 36, \text{ возведем во 2 степень}$$

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^3 + \left(\left(\frac{2}{a}\right)^3\right)^2 = 1296$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 - 2 = 1296$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 1298 \Rightarrow \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = 1298$$

Ответ: 1298 ✓

5

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

104311

0123456789

Бланк олимпиадной работы

NS

$$k \in [3; 8]$$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 3)$$

$$D = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24$$

$$D = k^2 - 14k + 49$$

$$D = (k - 7)^2$$

Рассмотрим случай $k \in [3; 7)$

$$\text{Тогда } \sqrt{D} = 7 - k$$

$$x_1 = \frac{5 - 3k + 7 - k}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{6 - 2k}{k^2 - 2k - 3}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 2x_2$$

$$x_2 = \frac{5 - 3k - 7 + k}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$x_2 = \frac{-1 - k}{k^2 - 2k - 3}$$

$$\frac{6 - 2k}{k^2 - 2k - 3} - \frac{2(-1 - k)}{k^2 - 2k - 3} \leq 0$$

$$\frac{6 - 2k + 2 + 2k}{k^2 - 2k - 3} \leq 0$$

$$k^2 - 2k - 3 \leq 0$$

$$(k + 1)(k - 3) \leq 0$$

$$k \in (-1; 3) - \text{не удовлетв.}$$

Рассмотрим случай $k = 7$

в этом случае ~~корень 1-й не удовлетв.~~

~~корень 2-й не удовлетв.~~

Рассмотрим случай $k \in (7; 8]$, $\sqrt{D} = k - 7$

$$x_1 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{-1 - k}{k^2 - 2k - 3}$$

$\Rightarrow$

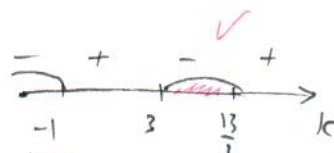
$$x_1 \leq 2x_2$$

$$x_2 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2k}{k^2 - 2k - 3}$$

$$\frac{-1 - k - 12 + 4k}{k^2 - 2k - 3} \leq 0$$

$$\frac{3k - 13}{(k + 1)(k - 3)} \leq 0$$



$$k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] - \text{не удовлетв. ?}$$

$\Rightarrow$ Ни в одном случае не подходит?

Ответ: 0 ?

10



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

104311

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

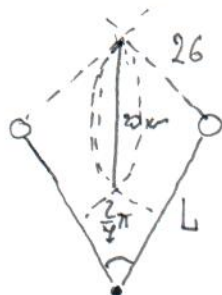


Бланк олимпиадной работы

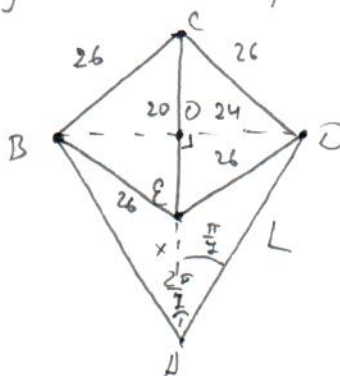
ИЧ

4 радаров надо разместить таким образом, чтобы покрыть кольцо шириной 20 км

значит ~~каждый~~ радар должен покрывать $\frac{2}{3}\pi$ сектора



$\Rightarrow$



~~один радар~~
~~должен быть~~
~~на вершине~~
~~треугольника~~

$BCDE$ - ромб $\Rightarrow BD \perp CE \Rightarrow CO = \frac{1}{2} CE = 10$

$$DO = \frac{1}{2} BD$$

по т. Пифагора найдем $DO \Rightarrow DO = 24$

тогда максимальное расстояние будет AO

$$AO = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow AO = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

~~AE = AO - OE = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{4}} - 10~~

$$AE = AO - OE \Rightarrow AE = 24 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 10$$

$$AC = AO + OE = 24 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 10$$

$$S_{\text{покрытие}} = \pi(R_{\text{в}}^2 - R_{\text{б}}^2) \Rightarrow S_{\text{покрытие}} = \pi \cdot ((24 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 10)^2 - (24 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 10)^2)$$

$$S_{\text{покрытие}} = \pi \cdot (546 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4} + 240 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 100 - 546 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4} + 240 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 100)$$

$$S_{\text{покрытие}} = 480 \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{24}{\sin \frac{\pi}{4}}; 480 \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

104311

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

№3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 + 64y - 22x + 505 = 0 \end{cases}$$

сложим 3 уравнения вместе

$$x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 1413 = 0$$

Выделим полные квадраты

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

Сумма квадратов будет равна 0, если каждый квадрат равен 0 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= -20 \\ y &= -22 \\ z &= -23 \end{aligned}$$

Ответ: -20; -22; -23.

✓

(15)

№6

Пирамида из 10 шаров, сложенных так, что каждый шар касается минимум 3х других будет выглядеть следующим образом:

1 ряд:

2 ряд:

3 ряд: 0 - находится в т. F

т.к. все шары одинаковые, они образуют правильную треугольную пирамиду. Найдем боковое ребро



Пусть радиус малых шаров R

$$\text{Тогда } XZ = ZY = YX = 4R$$

Точка A находится на продолжении XH, где $XH \perp YZ$

$$XA = R$$

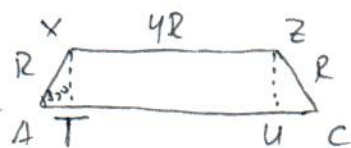
$$XH = 4R \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow XH = 2\sqrt{3}R$$

Бланк олимпиадной работы
№ 6 (продолжение)

$$\begin{aligned} XH &= 2\sqrt{3}R \\ XA &= R \end{aligned} \Rightarrow AH = (2\sqrt{3} + 1)R$$

Аналогично $CH' = AH = (2\sqrt{3} + 1)R$

Рассмотрим трапецию $CZXA$:



$$\angle XAC = 30^\circ, \text{ т.к. } \angle XAC = \angle ZXC - \text{н/л при } XZ \parallel AC \text{ и секущей } AX$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } AC &= AT + TH + HC, \quad AT = HC = AX \cdot \cos 30^\circ \\ TH &= XZ \end{aligned}$$

$$AC = 4R + \sqrt{3}R$$

$$AC = (4 + \sqrt{3})R$$

Треугольная трапеция вписана $\Rightarrow$ можно найти R

