



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 2 0 2 0 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э.Баумана

### ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |           | Подпись |
|--------|---|----|----|---|----|---|---|---|---|----|----------|-----------|---------|
|        |   |    |    |   |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью  |         |
| Оценка | 5 | 10 | 15 | 0 | 20 | 0 |   |   |   |    | 50       | пятьдесят |         |

1)  $\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = ?$ , если 1)  $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$

ОДЗ:  
 $a \neq 0$

2)  $\frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6}$ , пусть  $t = \frac{a^6}{2^6}$  тогда  $\frac{2^6}{a^6} = \frac{1}{t}$

$t = \frac{a}{2}$ , тогда  $\frac{1}{t} = \frac{2}{a}$ , имеем уравнение:

1)  $t^6 + \frac{1}{t^6} = ?$

2)  $t - \frac{1}{t} = 3$  поработаем со вторым

$(t - \frac{1}{t})^2 = 9$   $t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 = 9$   $t^2 + \frac{1}{t^2} = 11$

$(t^2 + \frac{1}{t^2})^3 = 11^3$   $t^6 + 3t^4 \cdot \frac{1}{t^2} + 3t^2 \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} = 11^3$

$t^6 + \frac{1}{t^6} = 1331 - 3(t^2 + \frac{1}{t^2}) = 1331 - 3 \cdot 11$ , т.е.  $t^6 + \frac{1}{t^6} = 1298$

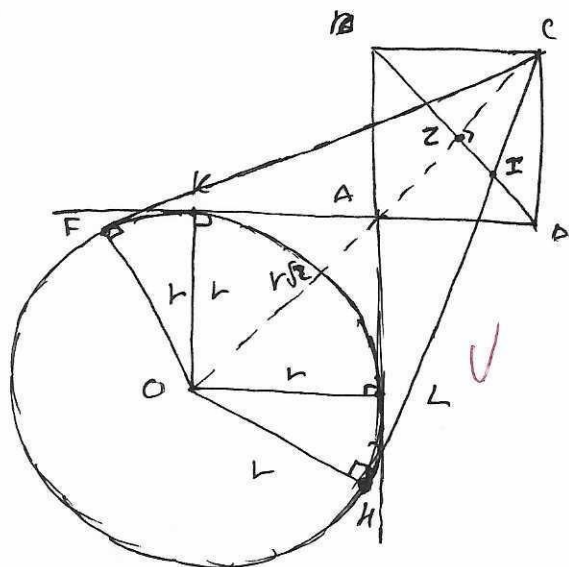
$t^6 + \frac{1}{t^6} = 1331 - 33 = 1298$   $t^6 + \frac{1}{t^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = 1298$

Ответ: 1298

✓

5

# Бланк олимпиадной работы

$$N^2$$


Dato:

ABCD - квадрат.

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

О-центр окружности

✓- page 0000000000.

$L = OK = OL$ ,  $K$  и  $L$  принадлежат  
одной и той же плоскости

Ф<sub>4</sub>И - точки касания касательных  
из точки С

$$OF = OM = r$$

ОС - буссекторна и ВСР.

$$z = BD \cap AC$$

$$I = CH_3BD \quad AB = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

Найлон: распуше и опухшими

Решение:  $\triangle CZI$  - прямоугол. т.ч.  $CA \perp OD$ , как диагонали квадрата  $ABCD$   
 $\angle FCD = \angle HCD = 36^\circ$ , т.ч.  $CA$  - биссектриса  $\angle FCH = 72^\circ$   
 $\triangle CZI$  и  $\triangle COH$  по двум углам ( $\angle CZI = \angle OHC = 90^\circ$  и  $\angle ZCH = \angle OCH = 36^\circ$ )  
 $\Rightarrow \frac{ZI}{OH} = \frac{CI}{OC}$

$$CZ = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \cdot r_2 = \frac{r_2 (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})}{2}$$

$$\cos 36^\circ = \sqrt{1 - (\sin 36^\circ)^2} = \sqrt{1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\angle 36^\circ = \frac{Z_I}{CZ} = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

$$C\phi = \frac{CZ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{2} (2 - \sqrt{5} - \sqrt{5}) \sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}} = \frac{2 (2 - \sqrt{5} - \sqrt{5})}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}$$

$$OC = OA + AC = \sqrt{2} + \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 1)$$

$$\frac{CI}{OC} = \frac{ZI}{O4} \quad (\text{продолжение на след. листе})$$

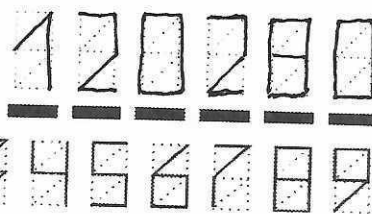


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{CF}{OC} = \frac{2(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})}{(\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 1)}$$

$$\frac{2I}{OH} = \frac{((2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{2}) / (\sqrt{5 - \sqrt{5}})}{2(\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \cdot 1}$$

$$\frac{CF}{OC} = \frac{2I}{OH} = \frac{2(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})}{(\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 1)} = \frac{2(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) / (\sqrt{5 - \sqrt{5}})}{(\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \cdot 1 \cdot 2}$$

$$\frac{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \cdot 1}{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 1)} = \frac{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2 \cdot 1} \quad (r \neq 0, r > 0)$$

$$2r = (\sqrt{5 - \sqrt{5}}) / (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 1)$$

$$2r = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} - (5 - \sqrt{5}) + 1(\sqrt{5 - \sqrt{5}})$$

$$2r(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$2r = \frac{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

Ответ:  $r = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$  ✓ (10)

Бланк олимпиадной работы

N3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

Положим все 3 уравнения

$$\begin{array}{r} + 612 \\ 256 \\ + 908 \\ 505 \\ \hline 1413 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 23y + 66z + 62x - 20z - 22x + 67y + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413 = 0$$

Это ни что иное, как сумма квадратов уравнений относительно  $x, y$  и  $z$ :

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ 22 \\ 44 \\ 184 \\ \hline 223 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^2 \\ 22 \\ 44 \\ 184 \\ \hline 223 \end{array}$$

Проверка:  $x^2 + 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 + 46z + 529 =$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413$$

$\Rightarrow$  имеем сумму квадратов, равную 0  $\Rightarrow$  каждое из них равно 0.

$$\begin{cases} x + 20 = 0 \\ y + 22 = 0 \\ z + 23 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -20 \\ y = -22 \\ z = -23 \end{cases}$$

Ответ:  $(-20; -22; -23)$

✓ (15)

Бланк олимпиадной работы

15  $k \in [3; 8]$  Найти вероятность того, что корни уравнения  $(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 \leq 2x_2$ .

1).  $k^2 - 2k - 3 \neq 0$ , иначе не будет 2 корней

$$(k-3)(k+1) \neq 0 \quad \begin{cases} k \neq 3 & k \neq -1 \end{cases}$$

2).  $D \geq 0$

$$D = (3k-5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 > 0$$

$$k^2 - 14k + 49 > 0 \quad (k-7)^2 > 0 \quad (k \neq 0, \text{ иначе будет 1 корень}).$$

Используем формулу корней:

$$x_1 = \frac{-(3k-5) - |k-7|}{2(k+1)(k-3)}; \quad x_2 = \frac{-(3k-5) + |k-7|}{2(k+1)(k-3)}$$

Рассмотрим два случая:  $k \in [3; 7)$  и  $k \in (7; 8]$ .

1). Пусть  $k \in [3; 7)$ .

$$x_1 = \frac{-3k+5 - (-(k-7))}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-3k+5+k-7}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2(k+1)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-1}{(k-3)}$$

$$x_2 = \frac{-3k+5 + (-(k-7))}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-3k+5-k+7}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4k+12}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4(k-3)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2}{(k+1)}$$

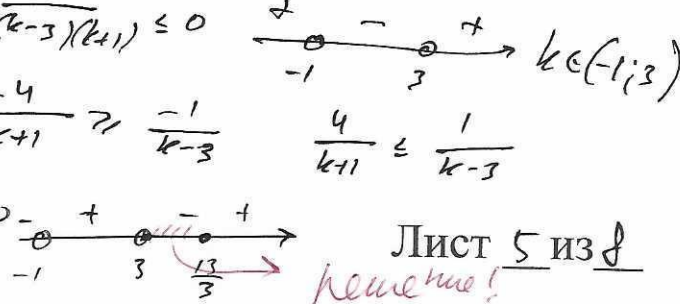
Если  $2x_1 \geq x_2$  то имеем

$$\frac{k+1-k+3}{(k-3)(k+1)} \leq 0 \quad \frac{4}{(k-3)(k+1)} \leq 0 \quad \frac{-2}{(k-3)} \geq \frac{-2}{(k+1)} \quad \frac{1}{(k-3)} \leq \frac{1}{k+1}$$

Если  $2x_2 \geq x_1$  то имеем

$$\frac{4k-12-k-1}{(k-1)(k-3)} \leq 0 \quad \frac{3k-13}{(k-1)(k-3)} \leq 0 \quad \frac{-4}{k+1} \geq \frac{-1}{k-3} \quad \frac{4}{k+1} \leq \frac{1}{k-3}$$

$$k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$$



Бланк олимпиадной работы

Д.ч. мы взяли  $k \in [3; 7)$ , то

имеем систему

$$\begin{cases} k \in [3; 7) \\ k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] \Rightarrow k \in (3; \frac{13}{3}] \checkmark \\ k \in (-1; 3) \end{cases}$$

2). Пусть  $k \in (7; 8]$

$$x_1 = \frac{-3k+5-k+7}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4k+12}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4(k-3)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2}{(k+1)}$$

$$x_2 = \frac{-3k+5+k-7}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2k-2}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-1}{(k-3)}$$

Пусть  $2x_1 > x_2$ : имеем неравенство  $\frac{-4}{k+1} > \frac{-1}{k-3}$

У этого неравенства решения  $k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$  (мы это уже решали выше).

Пусть  $2x_2 > x_1$ : имеем неравенство  $\frac{-2}{k-3} > \frac{-2}{k+1}$

Это мы тоже уже решали выше:  $k \in (-1; 3)$

Имеем систему:

$$\begin{cases} k \in (7; 8] \\ k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] \\ k \in (-1; 3) \end{cases} \text{ Она не имеет решений } k \in \emptyset.$$

~~Все~~ Все  $k$ , удовлетворяющие условию  $x_1 \leq 2x_2$  (и  $k \in [3; 8]$ ) на отрезке:  $(3; \frac{13}{3}]$ , длина этого отрезка =  $\frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3}$

# Бланк олимпиадной работы

Длина отрезка  $[3; 8]$  равна  $8 - 3 = 5$

Вероятность  $P$  попадания точки  $k$  в указанный отрезок равна  $\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$

Ответ:  $\frac{4}{15}$  ✓

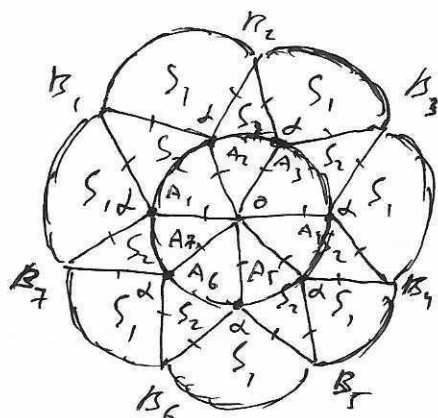
(20)

нч Максимальное расстояние, на котором можно расположить разрыв равно 26 км, т.к. разрыв при большем расстоянии не будет добивать до платформы и не покроют круг ~~раз~~ шириной 20 км полностью.

Площадь ~~кольца~~ ~~кольца~~, ограничено вершинами разрывов равна  $\frac{26^2}{4} = 169$  км<sup>2</sup>, где  $r = 26$   $S = \frac{\pi \cdot 26^2}{4} \approx 530.9$  км<sup>2</sup>

Если же площадь кольца ~~покрыта~~ это не площадь круга, ограниченного разрывами, то нам необходимо найти ещё и площадь за этим кругом, которую покрывают разрывы.

Площадь того сектора равна площади той фигуры:



$$A_1O = A_2O = \dots = A_7O = 26$$

$$A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_2 = \dots = A_1B_7 = A_6B_7 = 26$$

$$S_1 = S_2 = \dots = S_7 = S(\triangle OA_1B_1) = S(\triangle OA_2B_2) = \dots = S(\triangle OA_7B_7)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \cdot \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2} \cdot 26^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{7}$$

$S_2$  - площадь ромба  $OA_1B_1A_2$ .

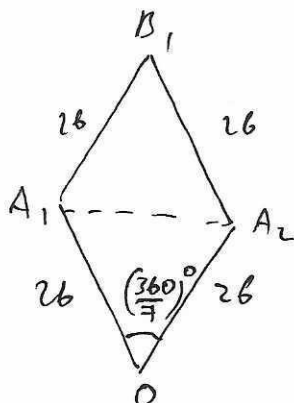
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Ромб



$$S_2 = \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) \cdot 26^2 = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) 26^2$$

$$\angle B_1 A_1 O = 180^\circ - \frac{360^\circ}{7} = \left(\frac{800}{7}\right)^\circ$$

~~Площадь семи ромбов равна  $7 \cdot S_1 + 7 \cdot S_2 = 7 \cdot 26^2 + 7 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) 26^2 =$~~

$S_2$  - площадь части круга с радиусом 26 и углом  $\angle =$   
 $\angle = 360^\circ - \frac{1800}{7} = \frac{2520^\circ - 1800^\circ}{7} = \frac{720^\circ}{7}$  (вычитаем  $\frac{1800}{7}$  ст.к.)

$$S_2 = \frac{\pi \cdot (26)^2 \cdot \frac{720^\circ}{7}}{360^\circ} = \frac{2\pi (26)^2}{7}$$

этот угол смежен с  
 углом ромбов  
 каждый по  $\frac{800^\circ}{7}$

$$S = 7 S_1 + 7 S_2 = 2\pi (26)^2 + 7 \cdot 26^2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = (26)^2 \left(2\pi + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$$

Ответ:  $S = 26^2 \left(2\pi + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$