



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

102490

0123456789

Бланк олимпиадной работы

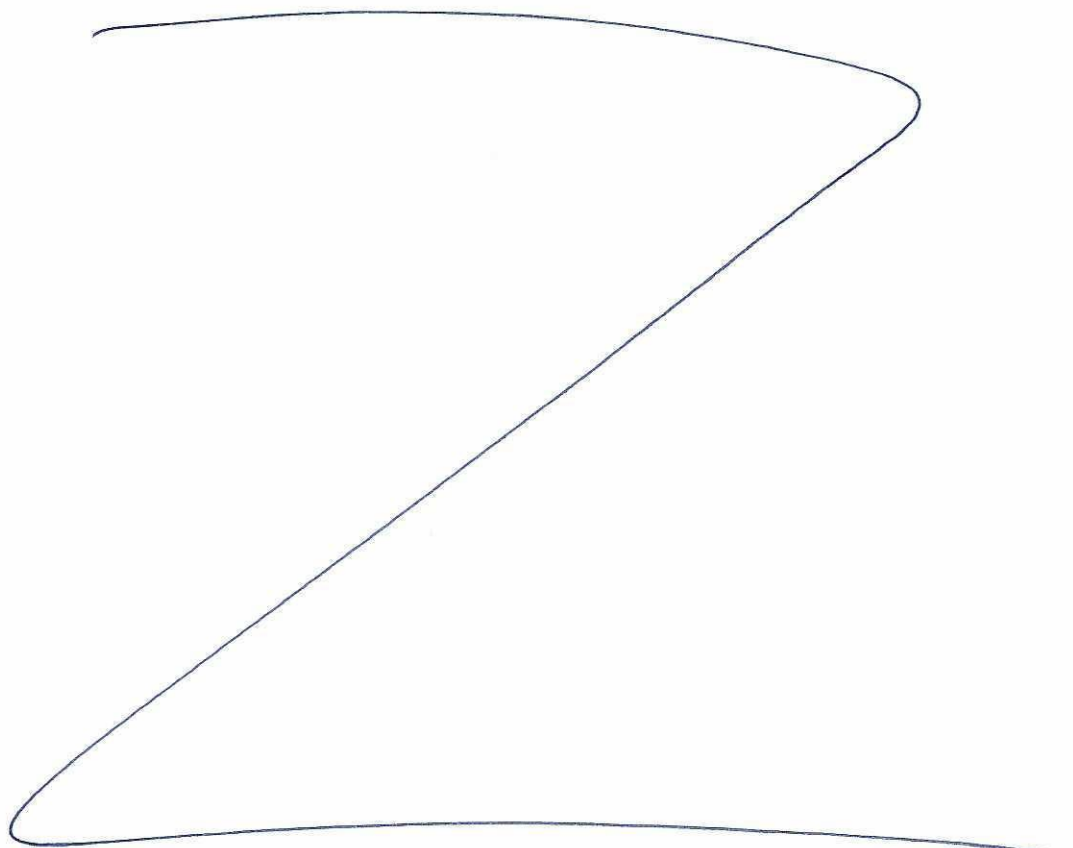
Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	0					50	пятьдесят	



Бланк олимпиадной работы

№5

$$k \in [3; 8]$$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0, \quad x_1 \leq 2x_2$$

I. $k^2 - 2k - 3 = 0$

$k = -1; 3 \rightarrow$ 1 корень, не подходит

II. $k \neq 3$, т.к. $k = -1 \notin [3; 8]$:

$$\begin{aligned} D &= (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = \\ &= k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2 \end{aligned}$$

$D > 0 \rightarrow k \neq 7$, т.к. 2 корня

$$x_{1,2} = \frac{-(3k - 5) \pm |k - 7|}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$x_1 = \frac{12 - 4k}{2(k^2 - 2k - 3)}; \quad x_2 = \frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)} \quad k \neq 3; 7$$

Т.к. $k \in [3; 8]$, то: $\left. \begin{aligned} k^2 - 2k - 3 &\geq 0; \\ 12 - 4k &\leq 0; \\ -2k - 2 &< 0; \end{aligned} \right\} \text{ при } k \in [3; 8]$

Тогда $x_1, x_2 < 0$ и ~~при этом $|x_1| > |x_2|$~~

~~Тогда, т.к. $x_1 \leq 2x_2$:~~

~~$-2x_2 \leq -x_1, \quad -x_1, -x_2 > 0$, тогда:~~

~~$-2 \cdot \frac{-(2k + 2)}{2(k^2 - 2k - 3)} \leq \frac{4k - 12}{2(k^2 - 2k - 3)}$~~

~~$\frac{4k + 4}{2(k^2 - 2k - 3)} \leq \frac{4k - 12}{2(k^2 - 2k - 3)}$~~



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

102490

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Найдем граничное k , при котором:

$$12 - 4k \leq -2k - 2$$

$$2k \geq 14$$

$$k \geq 7$$

Тогда при $k \in [7; 8]$, $x_2 \geq x_1$
 $k \in [3; 7]$, $x_2 \leq x_1$

Тогда по условию; что $x_1 \leq 2x_2$:

$$1) x_2 \geq x_1 \rightarrow k \in [7; 8] \text{ и } 2 \cdot \frac{(-2k-2)}{2(k^2-2k-3)} \geq \frac{12-4k}{2(k^2-2k-3)},$$

т.к. $k \neq 3; -1$ и при $k \in [3; 8]$ $k^2 - 2k - 3 > 0$:

$$-4k - 4 \geq 12 - 4k$$

$$0k \geq 16$$

$$k \in \emptyset$$

$$2) x_2 \leq x_1 \rightarrow k \in [3; 7] \text{ и } \frac{-2k-2}{2(k^2-2k-3)} \leq 2 \cdot \frac{12-4k}{k^2-2k-3}$$

$$-2k-2 \leq 24-8k$$

$$6k \leq 26$$

$$k \leq \frac{26}{6}, k \in [3; 7]$$

Тогда при $k \in (3; 4\frac{1}{3}]$ $x_1 \leq 2x_2$

$$P(A) = \frac{P(k)}{P(8; 3)} = \frac{4\frac{1}{3} - 3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = \frac{P(k)}{P(3; 8)} = \frac{4\frac{1}{3} - 3}{8 - 3} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$$

Ответ: $\frac{4}{15}$ ✓ (20)

Бланк олимпиадной работы

Б3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases} +$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 - 20^2 + (y+22)^2 - 22^2 + (z+23)^2 - 23^2 + 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 - 400 - 484 - 529 + 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 + 1413 - 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

Сумма квадратов равна нулю, если:

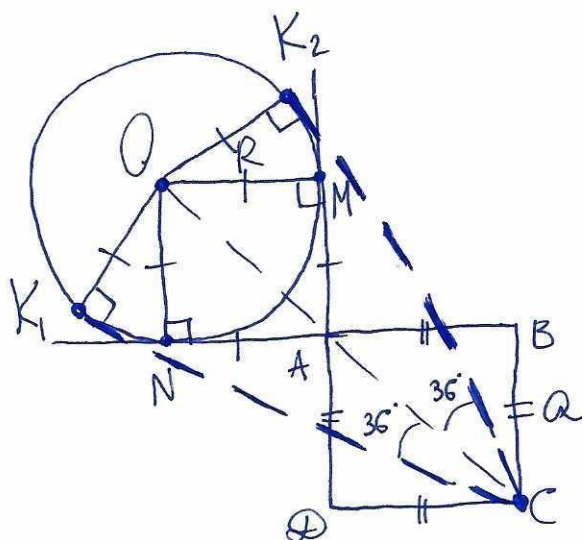
$$\begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

— единственное решение

Ответ: $(-20; -22; -23)$ ✓

(15)

Б2



$$\begin{aligned} a &= 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} \\ \angle K_2CK_1 &= 72^\circ \\ \sin 36^\circ &= \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Бланк олимпиадной работы

Решение:

- 1) $OM = ON = R$, т.к. AM и AN — касательные точки, т.к. $OM \perp AD$ и $ON \perp AB$, то $OMAN$ — квадрат со стороной R
- 2) $\angle OAN = 45^\circ$, т.к. окружность лежит на биссектрисе угла.
- 3) $CK_2 = CK_1$ — касательные, тогда $OK_2 = OK_1 = R$ и $OK_2 \perp CK_2$ и $OK_1 \perp CK_1$
- 4) Проверим CO , $A \in CO$, т.к. окружность лежит на биссектрисе угла $\angle C$, значит $\angle K_2CO = \angle K_1CO = \frac{\angle K_2CK_1}{2} = 36^\circ$.
- 5) В $\triangle OK_2C$ — прямоугольном: $\sin K_2CO = \frac{OK_2}{OC} = \frac{R}{OC}$;
 $OC = OA + AC$ из п.4, а OA и AC — диагонали квадратов, тогда $OA = R\sqrt{2}$ и $AC = (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})\sqrt{2}$
 $\sin K_2CO = \sin 36^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2} + (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})\sqrt{2}}$
 $\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(R + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})} \rightarrow 2R = \sqrt{5 - \sqrt{5}}(R + (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}))$
 $R(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = \sqrt{5 - \sqrt{5}}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})$
 $R = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$

Ответ: $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ ✓ (10)



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

102490

0123456789

Бланк олимпиадной работы

51

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = ? \quad , \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{(2a)^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = ?$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \quad | \cdot 12$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2 = 9$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 11 \quad | \cdot 12$$

$$\frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} + 2 = 11^2 = 121 \rightarrow \frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} = 119$$

$$\left(\frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} \right) = 119 \cdot 11$$

$$\frac{a^6}{64} + \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + \frac{64}{a^6} = 119 \cdot 11$$

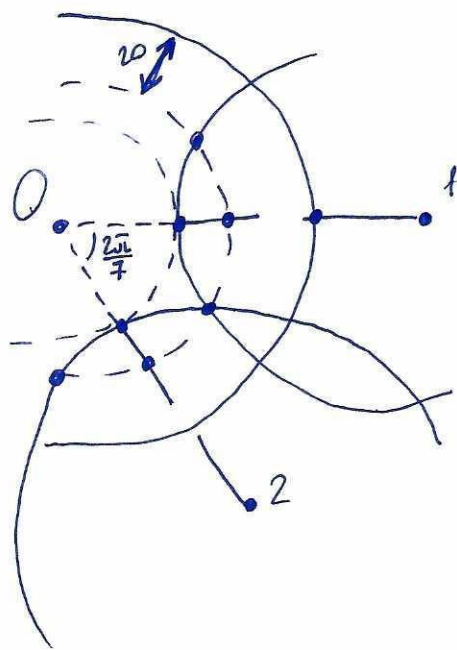
$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 119 \cdot 11 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} \right) = 119 \cdot 11 - 11 = 118 \cdot 11$$

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = 118 \cdot 11 = 1298$$

Ответ: 1298 ✓ (5)

Бланк олимпиадной работы

Б4



$$\begin{aligned}
 R &= 26 \\
 h &= 20 \\
 N &= 7
 \end{aligned}$$

? ϕ

Решение:

