

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12. 02. 23

Площадка написания МГТУ имени И.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Заполняется проверяющим													
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	3	10	15	10	20	0	 						

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 & (1) \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 & (2) \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) + (3):$

$$x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 20x + 400 - 400 + y^2 + 2 \cdot 22y + 484 - 484 + z^2 + 2 \cdot 23z + 529 - 529 + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 400 + 484 + 529 - 612 - 296 - 505 = 0$$

$$\begin{cases} (x+20)^2 \geq 0 \\ (y+22)^2 \geq 0 \\ (z+23)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

Ответ: $(-20; -22; -23)$

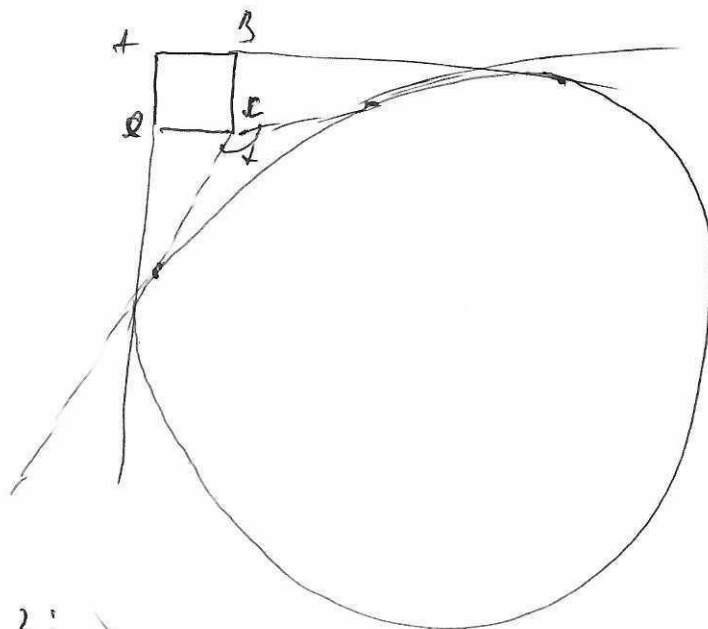
(+)

15 баллов

Бланк олимпиадной работы

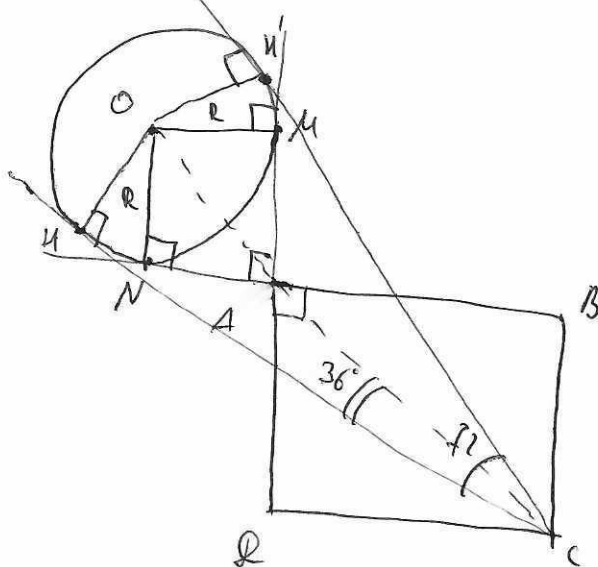
№ 2

1) случай 1.



$\angle > 72^\circ \Rightarrow$ 1 случай не подходит

2) случай 2:



10 баллов

(+)

- 1) $OK \perp CK$, т.е. $OK = R$, а CK - касательная
- 2) $OMNA$ - квадрат, т.е. $OA = \sqrt{2}R$ (со стороной R)
- 3) Т.е. $ABCD$ - квадрат со стороной $\dots$
 $\Rightarrow AC = \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}$
- 4) т.е. рисунок симметричен относительно AC , т.е. AC - биссектриса $\angle C$ и CK $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OKC = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$, тогда

$$\sin \angle OKC = \frac{OK}{OC} = \frac{OK}{AC + OA} = \frac{R}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) + \sqrt{2}R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 36^\circ = \frac{R}{R(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})} \Rightarrow \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}} + R)}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

120090

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$2R = (2 + \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 2)(\sqrt{5 - \sqrt{5}}) = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 5 - \sqrt{5} + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$2R - 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 5 - \sqrt{5}$$

$$R(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 5 - \sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 5 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}(2 + \sqrt{5 - \sqrt{5}})}{2 - 5\sqrt{5} - 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

$$\text{Ответ. } R = \frac{2\sqrt{5 - \sqrt{5}} + 5 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

N5

$k \in [3; 8]$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

при $k = -1$ и $k = 3$: $k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow$ только один корень $x \neq 0$

$$D = (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{при } k = 7 \rightarrow \text{только один корень, тогда}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2(k^2 - 2k - 3)} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2(k^2 - 2k - 3)} \\ x_1 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2(k^2 - 2k - 3)} \end{cases}$$

$x_1, x_2 < x_c$, т.е. $k^2 - 2k - 3 \geq 0$
при $k \in [3; 4]$

$$1) x_1 \leq 2x_2$$

Бланк олимпиадной работы

$$\frac{5-3k}{2(k^2-2k-3)} \leq \frac{2(-2-2k)}{2(k^2-2k-3)}$$

$$\frac{12-4k+4+4k}{2(k^2-2k-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{f(k)}{k^2-2k-3} \leq 0$$

Ищем $f(k) \Rightarrow k = -1$
 $k = 3$



$$k \in (-1; 3)$$

2) $x_2 \leq 2x_1$:

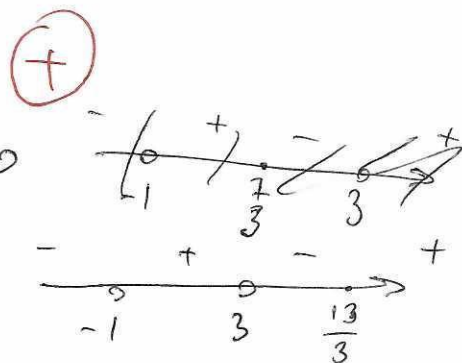
$$\frac{5-3k+k-7}{2(k^2-2k-3)} \leq \frac{2(12-4k)}{2(k^2-2k-3)}$$

$$\frac{-2-2k-2k+8k}{2(k^2-2k-3)} \leq 0$$

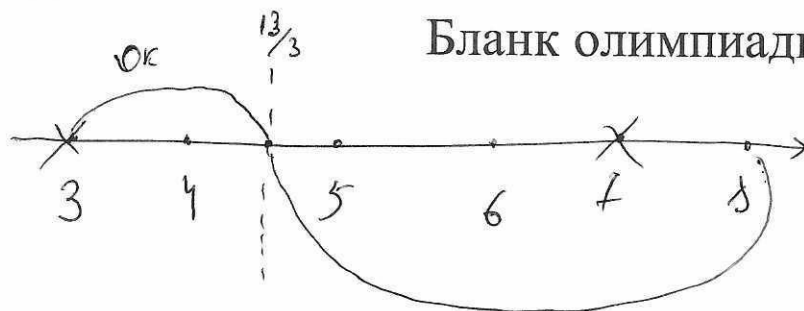
$$\frac{6k-26}{2(k^2-2k-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{3k-13}{2(k^2-2k-3)} \leq 0$$

$$k \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{13}{3}; 3\right) \cup (3; \frac{13}{3})$$

при $k \in (3; \frac{13}{3})$ $x_2 \leq 2x_1$



Бланк олимпиадной работы

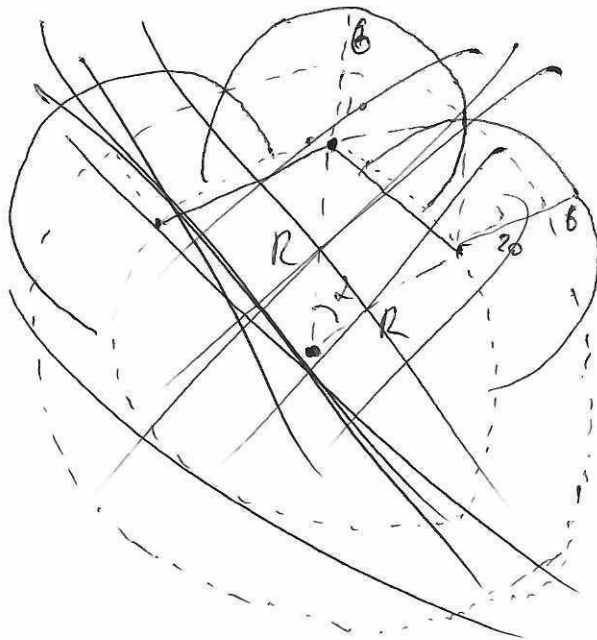


$$p = \frac{\text{длина отрезка } OK}{\text{длина всего отрезка}} = \frac{13/3 - 3}{5} = \frac{4/3}{5} = \frac{4}{15}$$

Ответ: $4/15$

№4

Все очевидно, что все невогнутые фигуры находятся на одинаковом расстоянии от центра масс, тогда obviously все возможные места окружности

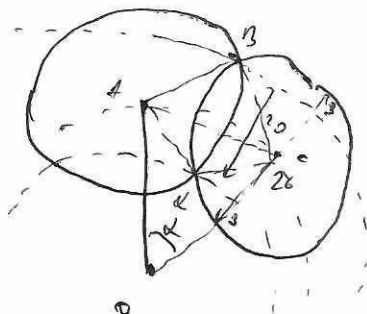


Продолжение рисунка окружностей

касательные их центры, по правилу правых рук симметричны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle = \frac{360}{7}$$

Бланк олимпиадной работы



$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} \approx 51^\circ$$

$$\cos \alpha \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ABCD - \text{плоскость} \Rightarrow AC = 26 \sqrt{2}$$

по т. косинусов:

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2 \cos \alpha \cdot AO \cdot CO \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26^2 = R^2 + R^2 - 2 \cos \alpha \cdot R^2$$

$$26^2 \cdot 2 = 2R^2 - 2 \cos \alpha \cdot R^2$$

$$R^2 = \frac{26^2}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow R = \frac{26}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{26}{\sqrt{1 - 0,7}} = \frac{26}{\sqrt{0,3}} \approx \frac{26}{0,55} \approx 47 = R$$

$$S_{\text{ш}} = \pi(47+10)^2 - \pi(47-10)^2 = \pi(453^2 - 33^2) = 20\pi \cdot 86 = 1710\pi \text{ м}^2$$

Ответ: 47 ; 1710 π м²

ответ неверный.

√1

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \Rightarrow a^2 - 4 = 6a \Rightarrow a^2 - 6a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{13} \\ c = 3 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\frac{(3 + \sqrt{13})^6}{2^6} + \frac{2^6}{(3 + \sqrt{13})^6} \approx 1298$$

⊖

точное решение - ?

35