



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МРТУ им. И.Э. Багдасаряна

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	0	0	16	30	 	 	 	 	51	пятьдесят один балл	И.Э. Багдасарян



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание 1.

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$1) \frac{a^2}{2^2} - 2 + \frac{2^2}{a^2} = 9$$

$$\frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} = 11$$

$$2) \left(\frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} \right)^2 = 11^2$$

$$\frac{a^4}{2^4} + 2 + \frac{2^4}{a^4} = 121$$

$$\frac{a^4}{2^4} + \frac{2^4}{a^4} = 119$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^{12}}{2^6 a^6} + \frac{2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} =$$

$$= \left(\frac{a^2}{2^2} \right)^3 + \left(\frac{2^2}{a^2} \right)^3 = \left(\frac{a^2}{2^2} + \frac{2^2}{a^2} \right) \left(\frac{a^4}{2^4} - 1 + \frac{2^4}{a^4} \right) =$$

$$= 11 \cdot (119 - 1) = 11 \cdot 118 = 1298$$

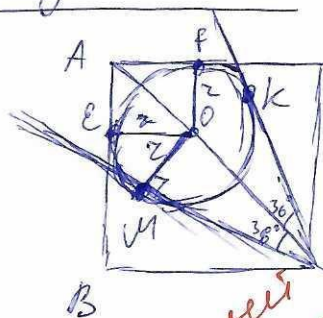
$$\begin{array}{r} \times 118 \\ 11 \\ \hline 118 \\ + 118 \\ \hline 1298 \end{array}$$

(+)

Ответ: 1298

5 баллов

Задание 2.



Д

Дано: ABCD - квадрат

окр(0; r); (1) E ∈ окр(0; r); (1) F ∈ окр(0; r)

(1) E ∈ AB

(1) F ∈ AD

перпендикуляр.

длина

AB и AD.

Найти: r

Решение:

1) Рассмотрим четырехугольник EAFD. В нем:

EO = OF (как радиусы); OE ⊥ AE; OF ⊥ DF (как касательные к окр.)

↓

EAFD - квадрат (смотри лист 3)

⊖

0 баллов



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

(продолжение задания 2)

$$EO = OF = r \Rightarrow AE = AF = EO = OF = r$$

Рассмотрим $\triangle AEO$. В нём:

$$\angle AEO = 90^\circ$$

По теореме Пифагора:

$$AE^2 + EO^2 = AO^2$$

$$r^2 + r^2 = AO^2$$

$$AO = \sqrt{2r^2} \Rightarrow AO = r\sqrt{2}$$

2) Рассмотрим $\triangle MOC$. В нём:

$$\angle OMC = 90^\circ \text{ (т.к. } OM \text{ — касательная к окр. } (O, r) \text{)}$$

$\angle OCM = \frac{1}{2} \angle KCM = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$ (т.к. отрезок, соединяющий точку пересечения двух касательных окружностей и центр этой окружности, делит угол между касательными пополам)

$$\sin 36^\circ = \frac{r}{OC} \Rightarrow OC = \frac{r}{\sin 36^\circ} = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

3) $AC = AO + OC$ (как диагональ квадрата и OC — гипотенуза)

$$AC = 2\sqrt{2} + \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

4) Рассмотрим $\triangle ABC$. В нём:

$$\angle ABC = 90^\circ$$

По т. Пифагора

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{(2-\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = (2-\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} AC &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{3}} \\ AC &= 2\sqrt{2} + \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} + \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad | - \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{3}} - 5\sqrt{2} + \sqrt{10} = 2\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{3}} + 2r\sqrt{2} \quad | : \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(\sqrt{5-\sqrt{3}} + 2) = 2\sqrt{5-\sqrt{3}} - 5 + \sqrt{5} \quad | : 2$$

$$r = \sqrt{5-\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\text{Обеб: } r = \sqrt{5-\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

(смотри лист 4)

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 5. $k \in [3; 8]$; $x_1 \leq 2x_2$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$$

$$x_1 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2k^2 - 4k - 6} = \frac{-2k - 2}{2k^2 - 4k - 6} = \frac{-k - 1}{k^2 - 2k - 3}$$

$$x_2 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2k^2 - 4k - 6} = \frac{-4k + 12}{2k^2 - 4k - 6} = \frac{-2k + 6}{k^2 - 2k - 3}$$

$$\frac{-k - 1}{k^2 - 2k - 3} \leq \frac{-4k + 12}{k^2 - 2k - 3}$$

$$\frac{-k - 1}{k^2 - 2k - 3} + \frac{4k - 12}{k^2 - 2k - 3} \leq 0$$

$$\frac{3k - 13}{k^2 - 2k - 3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3k - 13 \leq 0 \\ k^2 - 2k - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k - 13 \geq 0 \\ k^2 - 2k - 3 \leq 0 \end{cases}$$

1-ая система

$$\begin{cases} 3k - 13 \leq 0 \\ k^2 - 2k - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$k \leq \frac{13}{3} \quad k^2 - 2k - 3 \geq 0$$

$$k \in (-\infty; \frac{13}{3}] \quad k_1 = -1 \Rightarrow k \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$k \in (-\infty; -1] \cup [3; 4\frac{1}{3}]$$

2-ая система

$$\begin{cases} 3k - 13 \geq 0 \\ k^2 - 2k - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$k \geq 4\frac{1}{3} \Rightarrow k \in [4\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$k \in [-1; 3]$$

$$\Rightarrow k \in \emptyset$$

$$k \in (-\infty; -1] \cup [3; 4\frac{1}{3}]$$

$$\text{По усл. } k \in [3; 8] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in [-\infty; -1] \text{ дает напр. } k \text{ вероятность } P = 0.$$

$$\text{На участке } [3; 4\frac{1}{3}]$$

$$\text{вероятность будет равна}$$

$$P = \frac{[3; 4\frac{1}{3}]}{[3; 8]}$$

$$\text{Ответ: } P = 0, \frac{[3; 4\frac{1}{3}]}{[3; 8]}$$

(Смоделируйте шаг 5)

Бланк олимпиадной работы

Задание 5.

(продолжение задания 5)

количество цифр в промежутке $[3; 4\frac{1}{3}]$ делённого на количество цифр на промежутке $[3; 8]$. Но можно также сказать, что в первом промежутке количество возможных вариантов в 4 раза меньше, чем во втором $\Rightarrow$ вероятность будет равна

$$P = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ (25\%)}$$

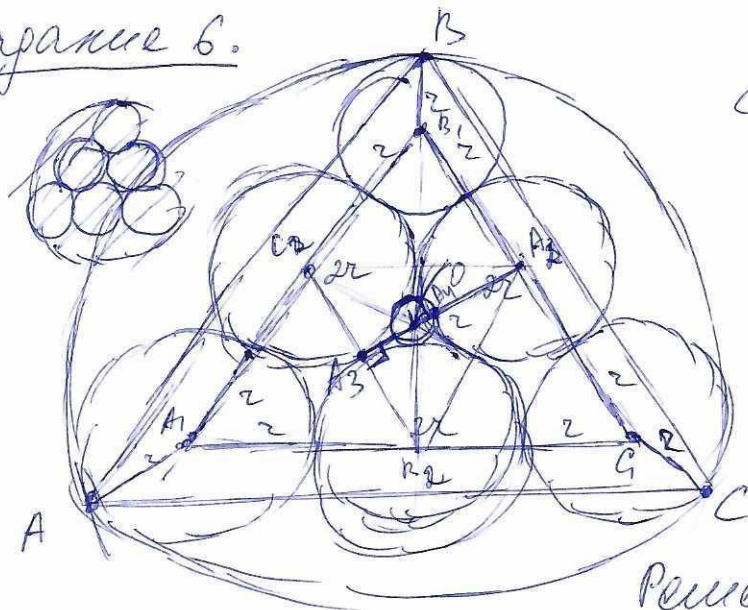
Ответ: $\frac{1}{4}$; 0,25 (25%)

приближения для K
найден верно,
вероятность найдена
неверно.

(+)

16 баллов

Задание 6.



Дано: 10 шаров радиуса r
вписаны в сферу радиу-
са $R = 5\sqrt{2} + 5$.
Шары расположены сим-
метрично, в центр этой
пирамиды помещают
шар радиуса r .

Найти: r ,

Решение:

- 1) Рассмотрим всю структуру с одной из её сторон.
- 2) $\triangle ABC$ вписан в окр ω и $\triangle ABC$ — равностор. (т.к. все шары одинаковые) $\Rightarrow AB = R\sqrt{3} = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}$
- 3) $\triangle ABC$ больше $\triangle A_1B_1C_1$, в r раз $\Rightarrow A_1B_1 = \frac{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}}{2}$
- 4) $A_1B_1 = 4r = \frac{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4r^2 = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}$

$$r = \frac{\sqrt{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}}}{2}$$

(используйте лист 6)

Бланк олимпиадной работы

(продолжение задания 6)

5) $\triangle A_2 B_2 C_2$ - равносторонний (т.к. образован радиусами от 3-х взаимно касающихся между собой и одинаковых окружностей)

$$A_2 B_2 = 2r + 2r = 4r$$

6) Проверим $A_2 O$. Этот отрезок будет проходить через центр нужной нам в итоге окружности, а также будет диаметр, соединяющей и все точки $\triangle A_2 B_2 C_2$ (т.к. $\triangle A_2 B_2 C_2$ - равносторонний)

~~$$A_2 A_3 \text{ - медиана} \Rightarrow A_2 O : O A_3 = 2 : 1 \Rightarrow O A_3 = r \Rightarrow A_2 A_3 = 3r$$~~

~~$$A_2 A_3 \text{ - диаметр} \Rightarrow A_2 O = 2r$$~~

$$A_2 A_3^2 = A_2 B_2^2 - A_3 B_2^2 \Rightarrow A_2 A_3 = \sqrt{12r^2} = 2r\sqrt{3}$$

$$A_2 B_2 = 4r ; A_3 B_2 = 2r \text{ (т.к. } A_2 A_3 \text{ - медиана)}$$

~~$$A_2 A_3 \text{ - диаметр} \Rightarrow A_2 O = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$$~~

$$8) O A_4 = A_2 O - A_2 A_4 = \frac{4r\sqrt{3}}{3} - 2r = \frac{4r\sqrt{3} - 6r}{3} = \frac{2r(2\sqrt{3} - 3)}{3}$$

$$A_2 A_4 = 2r$$

$$9) O A_4 = r_1 = \frac{2(2\sqrt{3} - 3)}{3} \cdot r = \frac{2(4\sqrt{3} - 6)(\sqrt{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}})}{6} = \frac{2(\sqrt{3} - 3)(\sqrt{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}})}{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}}}{2}$$

ответ: $\frac{2(\sqrt{3} - 3)(\sqrt{5\sqrt{6} + 5\sqrt{3}})}{3}$

(+)

2