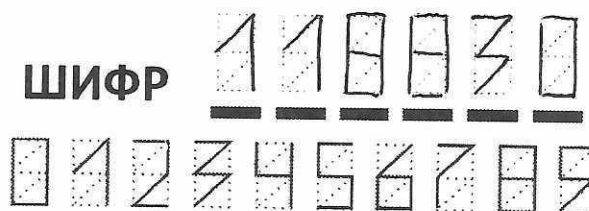


ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

(заполняется проверяющим)													
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	0	0	15	20	20	30	 						

Бланк олимпиадной работы

~ 1

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \quad t = \frac{a}{2}, t \neq 0$$

$$t - \frac{1}{t} = 3$$

$$t^2 - 1 = 3t$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$t^2 - 3t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

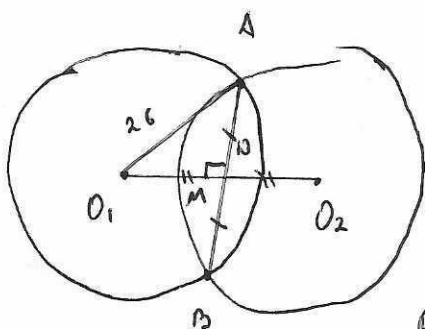
$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^{12}}{a^6 \cdot 2^6} + \frac{2^{12}}{a^6 \cdot 2^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = t^6 + \frac{1}{t^6}$$

~~t =~~

*задача не решена
0 баллов*

~ 4

1)



1) Чтобы обеспечить ~~круг~~ покрытие кольца шириной 20 км из пункта расположить



При этом для ~~каждого~~ из пересечений двух окружностей $AB \geq 20$ (км)

Расстояние максимально $\Rightarrow AB = 20$

2) $AM = MB = 10$; $O_1M = MO_2$ (из симметрии)

~~По т. Пифагора~~ По теореме Пифагора для $\triangle AO_1M$

$$AO_1^2 = O_1M^2 + MA^2$$

$$O_1M = \sqrt{AO_1^2 - MA^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{36 \cdot 16} = \sqrt{4 \cdot 16 \cdot 9} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \Rightarrow O_1O_2 = 48$$

3) Значит из центров окружностей образуется правильный шестиугольник со стороной $a = 48$

4) $\triangle O_1O_2M$ - ~~равно~~ прямоугольный; OM - высота, медиана $\triangle O_1O_2B_1$ (2)

$$O_2M = 24; \alpha = \frac{360^\circ}{12} = \frac{120^\circ}{2}$$

Бланк олимпиадной работы

$$R = \sin 2 = \frac{h_1 h}{R}$$

$$R = \frac{h_1 h}{\sin 2} = \frac{h_1 h}{\sin \frac{130^\circ}{7}} = \frac{24}{\sin \frac{130^\circ}{7}} \text{ (км)}$$

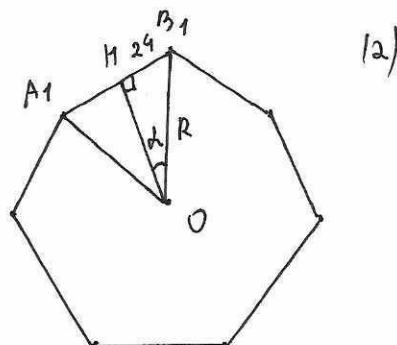
R - максимальное расстояние

5) Центр окружностей городов

лежат на окружности описанной около

правильного семиугольника, вершинами которого являются центры окружностей,

$$R = \frac{24}{\sin \frac{130^\circ}{7}}$$

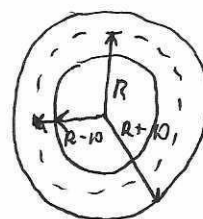


$$R_1 = R - MA = R - 10$$

$$R_2 = R + MA = R + 10$$

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi (R_2^2 - R_1^2) = \pi (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) = \pi (R + 10 - R + 10)(R + 10 + R - 10) = \pi \cdot 20 \cdot 2R$$

$$S = 40\pi R = 40\pi \cdot \frac{24}{\sin \frac{130^\circ}{7}} = \frac{960\pi}{\sin \frac{130^\circ}{7}} \text{ (км}^2\text{)}$$



Ответ: $R = \frac{24}{\sin \frac{130^\circ}{7}} \text{ км}$; $S = \frac{960\pi}{\sin \frac{130^\circ}{7}} \text{ км}^2$

~5

$$[3; 8] \quad x_1 \leq 2x_2$$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$(k - 3)(k + 1)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

1) $k \neq -1 \& [3; 8]$; $3 \& [3; 8] \Rightarrow k = 3$

$$0 \cdot x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{2}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -1$$

$$\frac{1}{2} \geq 1 \text{ неверно } \Rightarrow k = 3 \text{ не подходит}$$

2) $k \neq -1$; $k \neq 3$

Бланк олимпиадной работы

$$D = (3k-5)^2 - 2(k^2 - 2k - 3) = 3k^2 - 30k + 25 - 2k^2 + 4k + 6 = k^2 - 14k + 31 = (k-7)^2$$

2.1) $k=7$

$$x = \frac{-3k+5}{2(k-3)(k+1)} = \frac{-21+5}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{-16}{2 \cdot 4 \cdot 8} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq -\frac{2}{4} \quad -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \text{ неверно } \Rightarrow k=7 \text{ не подходит}$$

2.2) $k \neq 7$

$$x_1 = \frac{-3k+5+k-7}{2(k^2-2k-3)} = \frac{-2k-2}{2(k-3)(k+1)} = -\frac{k+1}{(k-3)(k+1)} = -\frac{1}{k-3}$$

$$x_2 = \frac{-3k+5-k+7}{2(k-3)(k+1)} = \frac{-4k+12}{2(k-3)(k+1)} = -2 \frac{k-3}{(k-3)(k+1)} = -\frac{2}{k+1}$$

$$1) -\frac{1}{k-3} \leq 2 \cdot \left(-\frac{2}{k+1}\right)$$

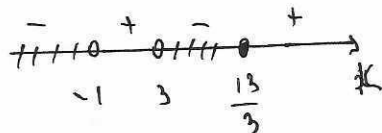
$$2) -\frac{2}{k+1} \leq 2 \cdot \left(-\frac{1}{k-3}\right)$$

$$\frac{1}{k-3} \geq \frac{4}{k+1}$$

$$\frac{k+1-4k+12}{(k-3)(k+1)} \geq 0$$

$$\frac{-3k+13}{(k-3)(k+1)} \geq 0$$

$$\frac{3k-13}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$



$$k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] \\ k \in (-1; 3) \\ k \in [3; 2] \end{array} \right.$$

$k \in (3; \frac{13}{3}]$ подходящий отрезок

$k \in \{3\} \cup (\frac{13}{3}; 2) \Rightarrow \text{вероятность} = \frac{\text{длина подходящего отрезка}}{\text{длина всего отрезка}}$

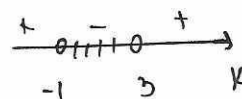
$$\frac{2}{k+1} \geq \frac{2}{k-3}$$

$$\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{k-3}$$

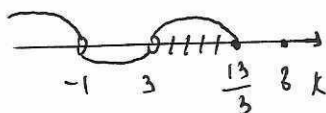
$$\frac{k-3-k-1}{(k+1)(k-3)} \geq 0$$

$$\frac{-4}{(k+1)(k-3)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(k+1)(k-3)} \leq 0$$



$$k \in (-1; 3)$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$k \in [3; 8] \text{ длина} = 5 = 2 \cdot 0$$

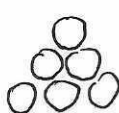
$$k \in [3; \frac{13}{3}] \text{ длина} = \frac{13}{3} - 3 = \frac{13-9}{3} = \frac{4}{3} = 0_1$$

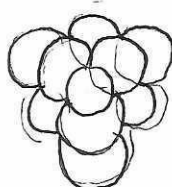
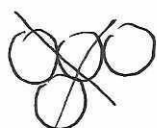
$$\text{вероятность} = \varphi = \frac{0_1}{0_0} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15}$$

Ответ: $\frac{4}{15}$

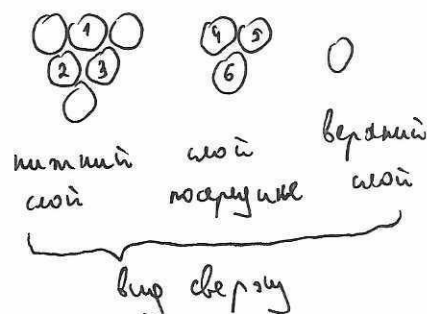
(+)

задача решена верно.

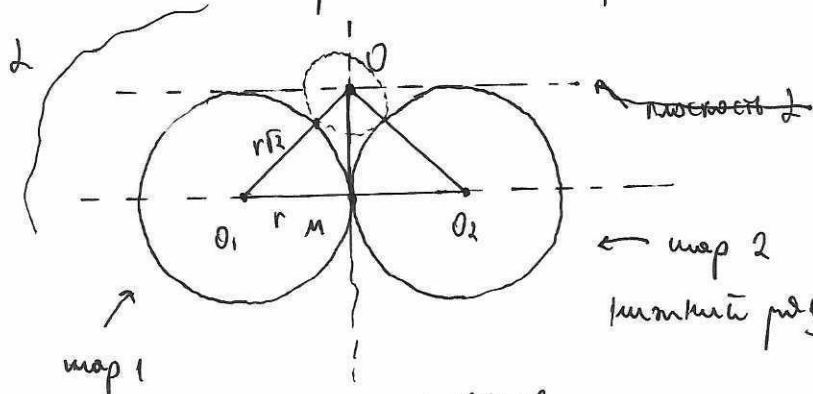
Пирамида имеет вид  вид со стороны



вид сверху
на всю пирамиду



Искомый шар касается шаров 1, 2, 3, 4, 5, 6, расположен между ними



Так как расстояние от O в плоскости L , которая касается нижнего и среднего слоев, до

на плоскость L (плоскость рисунка)

1) Из симметрии центра искомого шара лежит на пересечении
общей касательной к $\text{окр}(O_1; R)$ и $\text{окр}(O_2; R)$

$OM = R$ (расст. между параллельными прямыми)

$$O_1M = MO_2 = R \Rightarrow \text{по теореме Пифагора } O_1O = \sqrt{O_1M^2 + MO^2} = R\sqrt{2}$$

r_1 - искомый радиус

$$O_1O = R + r_1 = R\sqrt{2}$$

$$r_1 = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$$

(+)

Бланк олимпиадной работы

2) R - радиус сферы, в которую вписана пирамида

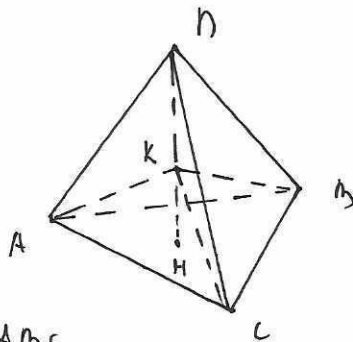
$$R = 5\sqrt{2} + 5$$

Пирамида - правильный тетраэдр,

a - сторона тетраэдра, $a = 5\sqrt{6} = 6r$

K - центр сферы, $K \in DH$ (т.к. правильный тетраэдр);

H - точка пересечения медиан $\triangle ABC$



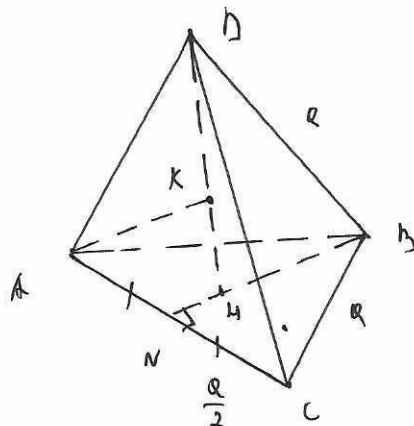
3) $\triangle KNC$ $\triangle BNC$: $BN = \sqrt{BC^2 - CN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

По д-ву медиан $\frac{BN}{HN} = \frac{2}{1} \Rightarrow BN = 2\frac{BN}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

4) По т. Пифагора для $\triangle BDN$

$$DN^2 = BD^2 - BN^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} = \frac{2a^2}{3}$$

$$DN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



5) $\frac{DK}{KN} = \frac{2}{1} \Rightarrow DK = 2\frac{DN}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$

$DK = R = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$

6) $R = \frac{6r \cdot \sqrt{33}}{18} = \frac{r\sqrt{33}}{3} \Rightarrow r = \frac{3R}{\sqrt{33}}$

$r_1 = r(\sqrt{2}-1) = \frac{3R}{\sqrt{33}}(\sqrt{2}-1) = \frac{3(5\sqrt{2}+5)}{\sqrt{33}}(\sqrt{2}-1) = \frac{15(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{33}} = \frac{15}{\sqrt{33}}$

Ответ: $r_1 = \frac{15}{\sqrt{33}}$

6) $R =$

Нужно 7) ($\triangle BDN$):

прошли BN от H , так что $\triangle BDN$ - равнобедренный

Бланк олимпиадной работы

8) $\tan L = \frac{PH}{OH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

~~$\tan L = \frac{RQ}{OQ} = \frac{RQ}{RQ}$~~

$\cos L = \frac{OH}{OP} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos L = \frac{OQ}{OK} = \frac{\frac{a}{2}}{OK} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OK = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}}$

$R = OK = \frac{3a}{2\sqrt{6}}$

9) ~~$R = 3a$~~ $R = \frac{3 \cdot 6r}{2\sqrt{6}} = \frac{9r}{\sqrt{6}} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{6}}{9}$

$r_1 = r(\sqrt{2}-1) = \frac{R\sqrt{6}}{9}(\sqrt{2}-1) = \frac{5(\sqrt{2}+1)\sqrt{6}}{9}(\sqrt{2}-1) = \frac{5\sqrt{6}(2-1)}{9} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$

Ответ: $r_1 = \frac{5\sqrt{6}}{9}$ $\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 & (1) \\ y^2 + 62x - 20z + 236 = 0 & (2) \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 & (3) \end{cases}$$



$(1) + (2) + (3): x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1415 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 400 + 484 + 529 = 0$

$x^2 + 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 + 46z + 529 = 0$

$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$

$$\begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

Ответ: $x=-20; y=-22; z=-23$

