



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

110793

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МТТУ имени Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

(заполняется проверяющим)													
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	0					50	пятьдесят баллов	А1



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

N1 $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^{12}}{2^6 a^6} + \frac{2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^6}{2^6} + \frac{2^6}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6$$

Пусть $\frac{a}{2} = t$, тогда $t - \frac{1}{t} = 3$, $t \neq 0$

$$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 - 2t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = 3^2 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 3^2 + 2 = 11$$

$$\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^3 = t^6 + 3 \frac{t^4}{t^2} + 3 \frac{t^2}{t^4} + \frac{1}{t^6} = t^6 + 3t^2 + 3\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^6} =$$

$$= t^6 + 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t^6} = 11 + \frac{1}{t^6} =$$

$$t^6 + \frac{1}{t^6} = 11^3 - 3 \cdot 11 = 11(121 - 3) = 11 \cdot 118 = 1298$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6, \quad t = \frac{a}{2}, \quad t \neq 0 \Rightarrow \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = t^6 + \frac{1}{t^6} = 1298$$

Ответ: 1298

(+)

N3
$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 6zx - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

Сложим все уравнения

$$x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$(x^2 + 40x + 400) - 400 + (y^2 + 44y + 484) - 484 + (z^2 + 46z + 529) - 529 +$$

$$+ 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 - 1413 + 1413 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

$$\geq 0$$

$$\geq 0$$

$$\geq 0$$

т.к. ~~все слагаемые~~

то $(x+20)^2 \geq 0$, $(y+22)^2 \geq 0$, $(z+23)^2 \geq 0$ при $x, y, z \in \mathbb{R}$,
то $(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$ при $(x+20)^2 = 0$, $(y+22)^2 = 0$, $(z+23)^2 = 0$

Бланк олимпиадной работы

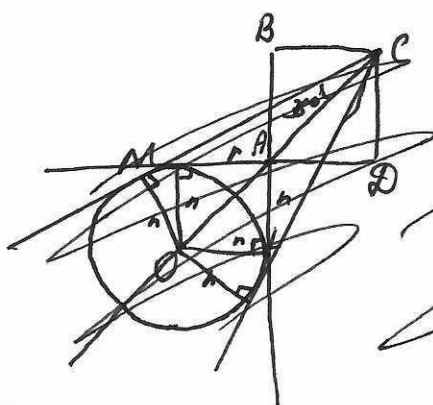
$$\begin{cases} (x+20)^2 = 0 \\ (y+22)^2 = 0 \\ (z+23)^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \cdot \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases} \quad (4)$$

Отвечать: $x = -20$; $y = -22$; $z = -23$

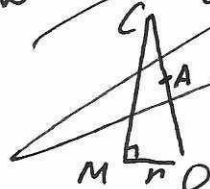
Дано:

$$a = 2 - \sqrt{5} - \sqrt{5} \text{ см}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$



Рассмотрим $\triangle CMO$



CA - диагональ ABCD =

Бланк олимпиадной работы

N5 $(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$

$D = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k - 24 =$
 $= k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$

$x_{1,2} = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{(k - 7)^2}}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2(k - 3)(k + 1)}, k \neq 3, -1$

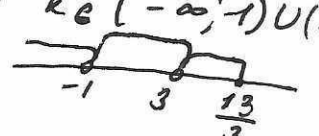
или $k \geq 7$

$x_{1,2} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2(k - 3)(k + 1)}$

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x_2 \\ x_1 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-4(k - 3)}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2(k - 3)}{(k - 3)(k + 1)} \quad (1) \\ x_2 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2(k + 1)}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-(k + 1)}{(k - 3)(k + 1)}, \\ x_1 \leq x_2 \\ x_1 = \frac{-(k + 1)}{(k - 3)(k + 1)} \\ x_2 = \frac{-2(k - 3)}{(k - 3)(k + 1)} \quad (2) \end{array} \right.$

$k \geq 7$

$k \in [3; 8]$

$k \in (-1; 3)$
 $k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$

 $k \in (-1; \frac{13}{3}] \cap [8; +\infty)$

$k \in [7; 8]$

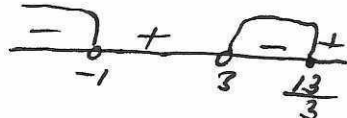
(1) $\frac{-2(k - 3)}{(k - 3)(k + 1)} \leq \frac{-2(k + 1)}{(k - 3)(k + 1)} \quad | \cdot \frac{1}{-2}$
 $\frac{k - 3}{(k - 3)(k + 1)} \geq \frac{k + 1}{(k - 3)(k + 1)}$

$\frac{k + 1 - k + 3}{(k - 3)(k + 1)} \leq 0 \quad \frac{4}{(k - 3)(k + 1)} \leq 0$

 $k \in (-1; 3)$

(2) $\frac{-(k + 1)}{(k - 3)(k + 1)} \leq \frac{-4(k - 3)}{(k - 3)(k + 1)} \quad | \cdot \frac{1}{-1}$
 $\frac{k + 1}{(k - 3)(k + 1)} \geq \frac{4k - 12}{(k - 3)(k + 1)}$

$\frac{3k - 13}{(k - 3)(k + 1)} \leq 0$



$k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}]$

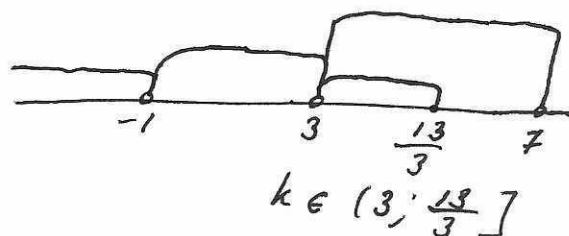
Бланк олимпиадной работы

$$k < 7$$

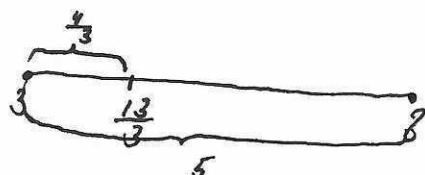
$$x_{1,2} = \frac{5-3k \pm (7-k)}{2(k-3)(k+1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5-3k-7+k}{2(k-3)(k+1)} = \frac{-(k+1)}{(k-3)(k+1)} \\ x_2 = \frac{5-3k+7+k}{2(k-3)(k+1)} = \frac{-2(k-3)}{(k-3)(k+1)} \\ x_1 \leq 2x_2 \\ x_1 = \frac{-2(k-3)}{(k-3)(k+1)} \\ x_2 = \frac{-(k+1)}{(k-3)(k+1)} \\ x_1 \leq 2x_2 \\ x < 7 \\ x \in [3; 8] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}] \\ k \in (-1; 3) \\ k \in [3; 7) \end{array} \right.$$



(+)



$$p = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267$$

Ответ: 0,267

№2 Дано: ABCD - квадрат
 $\alpha = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}$

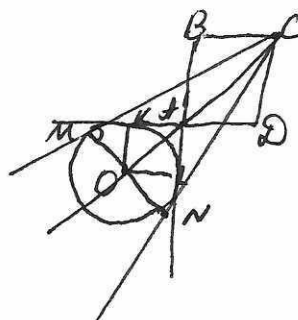
$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 72^\circ$$

Найти r

r - радиус окр.

Решение:



Рассмотрим $\triangle CMO$:

$\triangle CMO$ - прямоугольный
 CM - касательная к окр.
 CA - диагональ ABCD

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

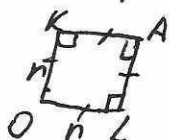


Бланк олимпиадной работы

из т. Пифагора $CA = a\sqrt{2}$

$MO = r$ (т.к. $M \in \text{окр.}$, O - центр).

Рассмотрим четырехугольник $AKOL$



$\angle OKA$ и $\angle OLA = 90^\circ$, т.к. по усл. продолжения сто-
рон $ABCD$ - касательны окр.
 $\angle KAL = 90^\circ$, т.к. $\angle KAL$ и $\angle BAD$ - верт. углы квадрата $= 90^\circ$

$\Rightarrow OKAL$ - прямоугольник (по усл.)
 $OL = KA$ и $OK = AL$ (по св. прямоугольника) $\Rightarrow OKAL$ - квадрат (по усл.)
 $OA = r\sqrt{2}$ (из т. Пифагора)

В $\triangle CMO$ $\angle MCO = 36^\circ$ (AC - диагональ $ABCD \Rightarrow$ биссектр. $\angle BCD$;
и биссектр. $\angle MCN$)

$$\sin \angle MCO = \frac{MO}{CO} \quad (\text{по усл.})$$

$$\sin \angle MCO = \frac{r}{a\sqrt{2} + r\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}(a+r)} = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}'}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}(2-\sqrt{5}-\sqrt{5}'+r)} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}'}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}r = \sqrt{5}-\sqrt{5}' \cdot \sqrt{2}(2-\sqrt{5}-\sqrt{5}'+r) \quad | : \sqrt{2}$$

$$2r = 2\sqrt{5}-\sqrt{5}' - (5-\sqrt{5}') + r\sqrt{5}-\sqrt{5}'$$

$$r(2-\sqrt{5}-\sqrt{5}') = \sqrt{5}'-\sqrt{5}(2-\sqrt{5}-\sqrt{5}') \quad | : (2-\sqrt{5}-\sqrt{5}')$$

$$r = \sqrt{5}-\sqrt{5}'$$

Отв. верт.: $\sqrt{5}-\sqrt{5}'$

