



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

100468

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	15	14	20	0					54	пятьдесят четыре балла	Я. Я.

Задание 1. $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{a^2 - 2^2}{2a} = 3$ (Дано)

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{(a^6)^2 - 2 \cdot a^6 \cdot 2^6 + (2^6)^2 + 2a^6 \cdot 2^6}{2^6 a^6} = \left(\frac{a^6 - 2^6}{2^3 a^3}\right)^2 + 2 =$$

$$= \left(\frac{(a^2)^3 - 3a^2 \cdot 2^2 + 3a^2 \cdot 2^4 - (2^2)^3}{2^3 a^3}\right)^2 + 2 = \left(\frac{(a^2 - 2^2)^3}{2a}\right)^2 + 2 = \left(\frac{(a^2 - 2^2)^3}{2a}\right)^2 + 2 =$$

$$= \left(\frac{(a^2 - 2^2)^3}{2a}\right)^2 + 2 = (3^3 + 3 \cdot 3)^2 + 2 = (27 + 9)^2 + 2 = 36^2 + 2 =$$

$$= 1296 + 2 = 1298$$

Ответ: 1298.

(+)

Задание 3.

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

* Сложим все уравнения.

$$\begin{array}{r} 612 \\ + 296 \\ \hline 908 \\ 400 \\ + 484 \\ \hline 884 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 23y + 62x - 22x + 66z - 20z + 67y + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y + 40x + 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 20 + 20^2 + (y^2 + 2 \cdot y \cdot 22 + 22^2) + (z^2 + 2 \cdot z \cdot 23 + 23^2) = 0$$

$$20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 22 + 23^2 = 400 + 880 + 529 = 1413$$

$$\Rightarrow (x + 20)^2 + (y + 22)^2 + (z + 23)^2 = 0$$

Это возможно, если все слагаемые равны 0 $\Rightarrow$ (предположение не имеет)



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

100468

0123456789

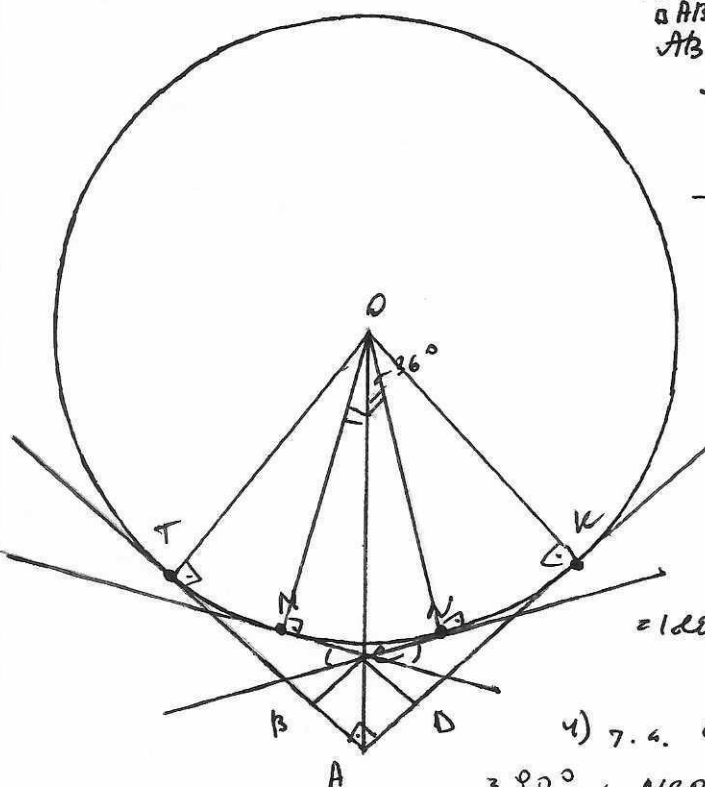
Бланк олимпиадной работы

Задача 3) (продолжение)

$$\begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

Отвечая: $x=-20$; $y=-22$; $z=-23$.

Задача 2) (продолжение)



Дано:
ABCD

$$AB = 2\sqrt{5-\sqrt{5}} \text{ см}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\angle NCD = 72^\circ$$

R-?

1) Пусть T-точка касания (AB) и окружности $\omega(O; R)$

K-точка касания (AD) и $\omega(O; R)$

2) по св-ву касательных

$$\angle OAK = \angle OAT = (\angle OAT - \angle OAT) = 45^\circ \text{ (т.к. ABCD - квадрат)}$$

3) CN-касательная к окружности (N-точка касания)

по св-ву радиуса: $ON \perp CN$ и $OM \perp CM$

$$\text{т.к. } OA - \text{диаметр} \Rightarrow \angle ACD = \angle ACD$$

$$\angle NCD = 72^\circ \Rightarrow \angle OCN = 180^\circ - \angle NCD = 108^\circ$$

$$\angle OCN = \frac{1}{2} \cdot \angle OCN = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

$$\text{т.к. } ON \perp CN \Rightarrow \triangle ONC - \text{прямоугольный} \Rightarrow \angle CON = 90^\circ - \angle NCD = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

5) т.к. K-точка касания, по св-ву радиуса $OK \perp AK$ и $\triangle OKA - \text{прямоугольный}$

$$\text{т.к. } AO - \text{диаметр} \Rightarrow \angle OAK = 45^\circ \Rightarrow \angle AOK = 45^\circ \Rightarrow \triangle OKA - \text{равнобедренный} (OK = OA)$$

$$\text{по теор. Пифагора: } AO^2 = OK^2 + AK^2 \Rightarrow AO = R\sqrt{2}; (OK = R)$$

$$6) ABCD - \text{квадрат} \Rightarrow AC - \text{диагональ} \Rightarrow AC = AB\sqrt{2}$$

$$7) \triangle ONC - \text{прямоугольный} \Rightarrow \sin \angle CON = \frac{ON}{OC} = \frac{R}{AO-AC} \quad (ON = R);$$

$$\cos \angle CON = \cos 36^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2} - AB\sqrt{2}} \Rightarrow R\sqrt{2} \cdot \cos 36^\circ - R = AB\sqrt{2} \cos 36^\circ;$$

$$R(\sqrt{2} \cdot \cos 36^\circ - 1) = AB\sqrt{2} \cos 36^\circ \text{ (продолжение на листе 3)}.$$

Бланк олимпиадной работы

Задание 2 (продолжение).

$$R(\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} - 1) = (2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}) \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};$$

$$R = \frac{(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}) \sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}} - 2};$$

$$R = \frac{(3+\sqrt{5} + 2\sqrt{3+\sqrt{5}})(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})}{\sqrt{5} - 2} = \frac{(\sqrt{5}+1)(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})(3+\sqrt{5} + 2\sqrt{3+\sqrt{5}})}{4} \quad (см.);$$

Ответ: $\frac{(\sqrt{5}+1)(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})(3+\sqrt{5} + 2\sqrt{3+\sqrt{5}})}{4}$ см.

Задание 5

$$k \in [3; 8]$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1)$$

$$D_1 = 1 - 4 = -3$$

$$k = \frac{1 \pm 2}{1}$$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0;$$

$$D = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 + 25 - 30k - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k-7)^2$$

$$x_1 = \frac{-3k+5+7}{2(k^2-2k-3)} = \frac{-k-1}{(k+1)(k-3)} = \frac{-1}{k-3} \quad (k \neq -1)$$

$$x_2 = \frac{-3k+5-7}{2(k^2-2k-3)} = \frac{-2k-2}{(k+1)(k-3)} = \frac{-2}{k+1} \quad (k \neq 3)$$

$$\begin{cases} \frac{-1}{k-3} \leq \frac{-2}{k+1} \\ \frac{-2}{k+1} \leq \frac{-2}{k-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k+1-4k+12}{(k-3)(k+1)} \geq 0 \\ \frac{k-3-k-1}{(k-3)(k+1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13-3k}{(k-3)(k+1)} \geq 0 \quad (1) \\ \frac{1}{(k-3)(k+1)} \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) Решим $f(k) = \frac{13-3k}{(k-3)(k+1)}$; $D_f = R \setminus \{-1; 3\}$; Нули: $k = \frac{13}{3}$

Согласен с усл. $(k \in [3; 8]) \Rightarrow k \in (3; \frac{13}{3}]$.

(2). Решим $g(k) = \frac{1}{(k-3)(k+1)}$; $D_g = R \setminus \{-1; 3\}$

Согласен с усл.: $k \in \emptyset$

$\Rightarrow$ вернемся к совокупности: $k \in (3; \frac{13}{3}]$.

$R = \frac{\frac{13}{3} - 3}{8 - 3} = \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$; Ответ: $\frac{4}{15}$.

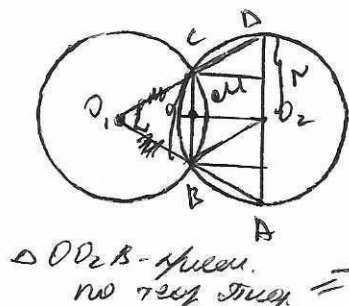


Бланк олимпиадной работы

Задача 4

$\lambda_{\text{max}} = 26 \text{ nm}$
 $n = 4$
 $\lambda = 20 \text{ nm}$

 $R_{\text{max}} = ?$
 $S_{\text{max}} = ?$

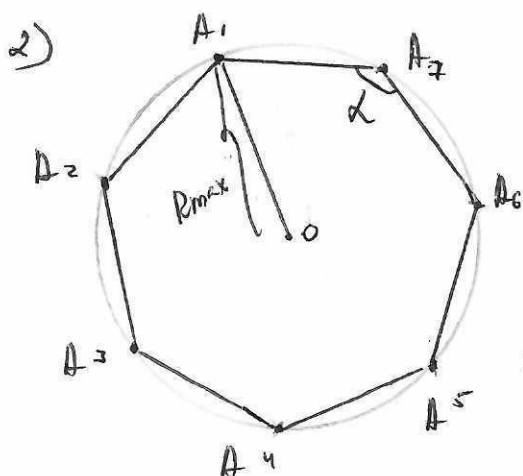


1) ABCD - параллелограмм. Требуется
(BC || DA)

1) ABCD - p15 тран.

$$O_1 O_2 = 2 O_2 m$$

$$O_2 \text{ cm} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}$$



$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ - прав. симметричные

ye $A_1 A_2 \approx 2 \cdot R_{max} \sin 2$

$$\alpha = \frac{100^\circ (\text{m} \cdot 2)}{n} = \frac{100^\circ \cdot 5}{7} = \frac{300^\circ}{7} = 126 \frac{4}{7}^\circ$$

$$A_1 A_2 = 2 O_2 u \text{ (при } u = 1)$$

$$2) R_{\max} = \frac{2 \cdot 0.2 \text{ m}}{2 \sin 2} = \frac{24}{\sin 2} = \frac{24}{\sin (2 \cdot \frac{\pi}{180})} \approx 7$$

$$3) S_{\text{кольца}} = \pi(R_{\text{max}} - \frac{l}{2})^2 - \pi(R_{\text{max}} + \frac{l}{2})^2 = -4\pi(R_{\text{max}}^2 + \frac{l^2}{4})$$

расстояние
найдено верно
Сколько
найдено неверно.

145