



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

102326

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	0					50	пятьдесят баллов	81-11

~~$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} - ? \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$~~
~~Преобразуем $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{a^2 - 4}{2a} \neq 3$~~
~~Возведем обе части в~~

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} - ? \quad \frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^6 = 3^6 \leftarrow \text{возведем обе части в 6 степень.}$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 = 3^6$$

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2\right) \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2\right) \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2\right) = 3^6$$

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2}\right)^3 = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} + 3 \left(\frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{4}{a^2}\right) +$$

$$+ 3 \left(\frac{a^2}{4}\right) \left(\frac{16}{a^4}\right) + 3 \left(\frac{4}{a^2}\right) \left(\frac{16}{a^4}\right) = 11^3$$

(+)

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} + 3 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2}\right) = 11^3$$

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 11^3 - 3 \cdot 11$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 9$$

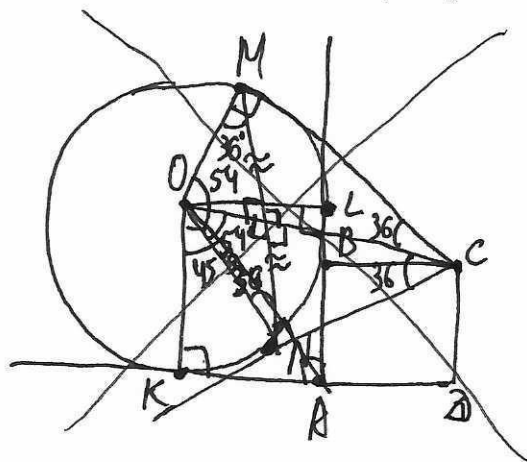
$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 11$$

Лист 1 из 5

Ответ: $11^3 - 33 = 1288$

Бланк олимпиадной работы

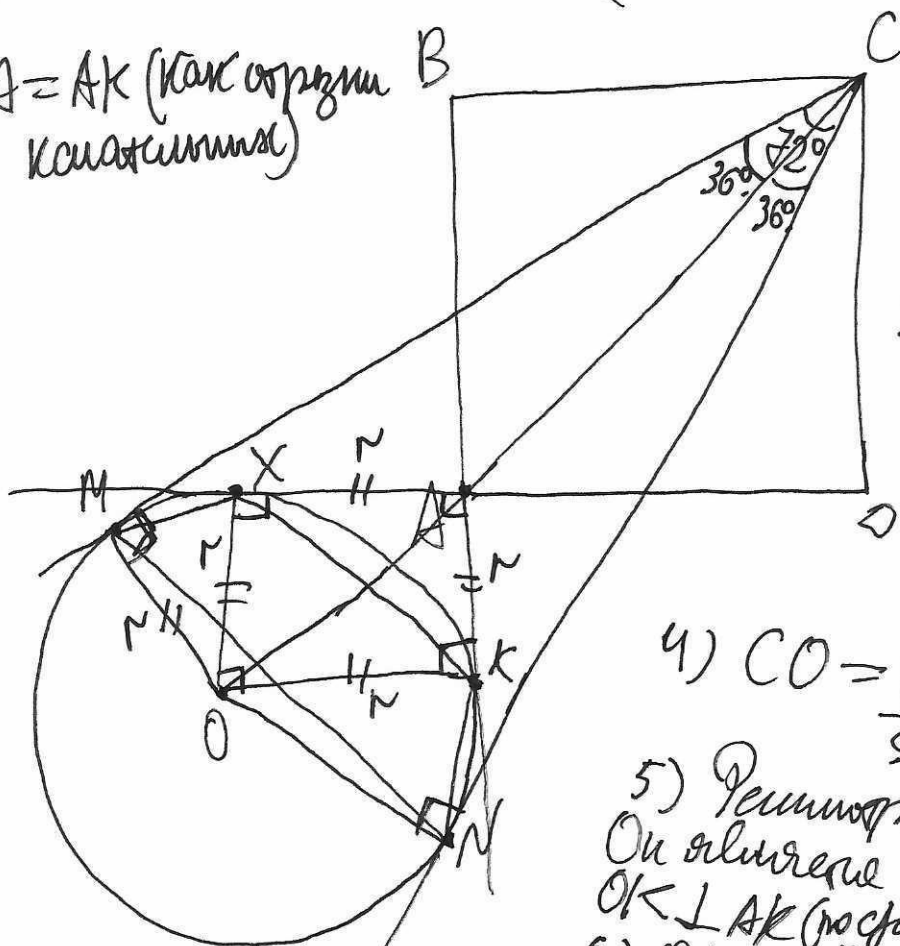
N2



ppp

11/17/21 11:24 AM

$XA = AK$ (как отрезки
касательные)



Решение.

- 1) Пусть O -центр окружности.
- 2) Тогда CO -диаметр.
- 3) Проведем OM и ON — радиусы окружности:
 $OM \perp CM$, $ON \perp CN$
 (радиус $\perp$ касательной).

4) $CO = OM$
 $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{r}{\Delta CMO \text{ прямо } \text{ треугольн.}}$

- 5) Радиусы $\sin 36^\circ$ и $\sin 36^\circ$.
 Он является катетом, т.к. $OX \perp AM$
 $OK \perp AK$ (по см. зраку)
 6) $OA = r\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора) $\Rightarrow OX = AX = AK = OK$
 (по теореме Пифагора)
 $(2 - \sqrt{5} - \sqrt{8}) + r\sqrt{2}$
 $(-\sqrt{5} + r)$

7) $CO = AC + CO = \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{8}}) + r\sqrt{2}$
 8) $\frac{\sqrt{5 - \sqrt{8}}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{8}} + r)$
 $\frac{\sqrt{5 - \sqrt{8}}}{\sqrt{5 - \sqrt{8}}} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{5 - \sqrt{8}} + r)$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}r}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(2-\sqrt{5}+\sqrt{5}+r)$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{2r}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{5-\sqrt{3}} + r.$$

$$\frac{2r}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - r = 2 - \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

$$r \left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - 1 \right) = 2 - \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

$$r \left(\frac{2 - \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \right) = 2 - \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

$$r = \sqrt{5-\sqrt{3}}$$

Ответ: $r = \sqrt{5-\sqrt{3}}$

N5

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3k - 5) \pm \sqrt{(k - 7)^2}}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-(3k - 5) \pm (k - 7)}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

Пусть $x_1 = \frac{-3k + 5 + k - 7}{2(k^2 - 2k - 3)}$, $x_2 = \frac{-3k + 5 - k + 7}{2(k^2 - 2k - 3)}$

$$x_1 = \frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)}; x_2 = \frac{-4k + 12}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$x_1 \leq 2x_2.$$

$$\frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)} \leq 2 \cdot \frac{(-4k + 12)}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$\frac{-2k - 2}{2} \leq -4k + 12$$

$$\frac{-2(k + 1)}{2} \leq -4k + 12$$

$$-k - 1 \leq -4k + 12.$$

$$3k \leq 13 \rightarrow k \leq \frac{13}{3}.$$

$$\text{Пусть } x_1 = \frac{-4k + 12}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$x_2 = \frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$\frac{-4k + 12}{2(k^2 - 2k - 3)} \leq 2 \cdot \frac{(-2k - 2)}{2(k^2 - 2k - 3)}$$

$$\frac{-2(2k + 6)}{2} \leq -2k - 2$$

$$-2k + 6 \leq -2k - 2$$

$$6 \leq -2$$

Не выполняется. Лист 3 из 5



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Таким образом, $k \leq \frac{13}{3}$. Т.е. k может принимать значения из промежутка $[3; \frac{13}{3}]$. Длина этого промежутка $\frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3}$.
Длина промежутка, в котором может находиться k равна $5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$.
Таким образом, искомая вероятность $\frac{4}{3} : 5 = \frac{4}{15}$.

Ответ: $\frac{4}{15}$

+

№3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

Сложим все 3 уравнения; получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y + 46z + 40x + 1413 = 0$$

Полученное уравнение удобно преобразовать к виду:

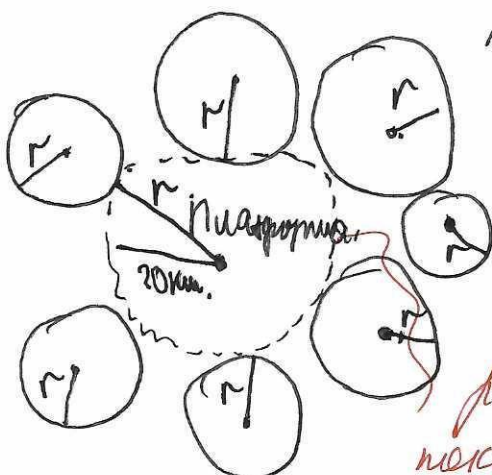
$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

Решением данного уравнения будет единственная тройка чисел $(x=-20; y=-22; z=-23)$.

Ответ: $(-20; -22; -23)$.

+

№4



Радары должны размещаться на расстоянии от платформы, где это возможно образовать кольцо шириной 20 км.

Радары не покрывают все аэропорт в случае представления решения.

⊖

Бланк олимпиадной работы

Площадь этого круга можно найти по формуле площади круга: $S = \pi r^2$.

$$S = 3,14 \cdot 20^2 \text{ км}^2 = 3,14 \cdot 400 = 1256 \text{ км}^2.$$

Ответ: 1256 км²

