

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23г.

Площадка написания Санкт-Петербургский Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	2	15	-	14	10	46	сорок шесть	

N° 6

Дано: 10 шаров радиуса r (рис.1)

$$R_{\text{большой сферы}} = \sqrt{6} + 1$$

Найти: $R_{\text{шара}}$, вписанного в центр пирамиды из шаров, касающегося 6 шаров

Решение:

105

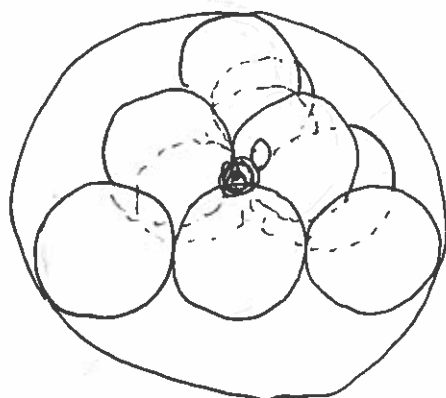


Рис. 1

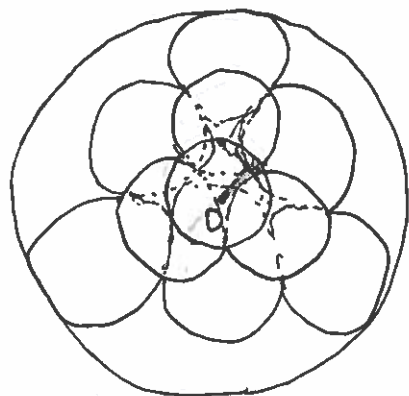


Рис. 2

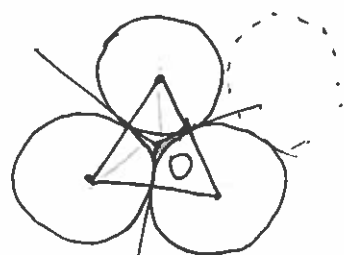


Рис. 3



Рис. 4

1) посмотрим сверху (рис.2), т. О - центр большой сферы

2) очевидно, что нам нужно найти радиус шара, касающегося 6 шаров, не расположенных на вершинах пирамиды $\Rightarrow$ надо найти расстояние от центра большой окружности, до ~~любого~~ любого из расположенных вокруг шаров

3) шары соевичены "тройками" (рис.3), центры которых образуют равносторонние треугольники со стороной $2r$, расстояние от т. О до каждой из сторон = $\frac{2\sqrt{3}r}{3}$

? 4) $R_{\text{большой}} = r + \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}r}{3} = \frac{3r + 4\sqrt{3}r}{3} = r(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3})$

$$r = \frac{\sqrt{6} + 1}{1 + 2\sqrt{3}}$$

5) $R_{\text{нужный}} = \text{расс. от О. до}$

Ответ: ?

ШИФР

1 1 3 0 7 9

N° 1

Найти $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6}$, если $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} + \frac{9}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} = 4 + 2 = 6$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^4 = 2^4 = 16$$

$$\frac{a^4}{81} - 4 \frac{a^2 \cdot 3}{27a} + 6 \frac{a^2 \cdot 3}{9a^2} - 4 \frac{a \cdot 27}{3a^3} + \frac{81}{a^4} = 16 \Rightarrow \frac{a^4}{81} + \frac{81}{a^4} = 16 - 6 + 4 \left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2}\right) = 34$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^6 = 2^6 \Rightarrow \frac{a^6}{729} - 6 \cdot \frac{a^5}{243} \cdot \frac{3}{a} + 15 \frac{a^4}{81} \cdot \frac{9}{a^2} - 20 \frac{a^3}{27} \cdot \frac{27}{a^3} + 15 \frac{a^2}{9} \cdot \frac{81}{a^4} - 6 \frac{a \cdot 243}{3a^5} + \frac{729}{a^6} =$$

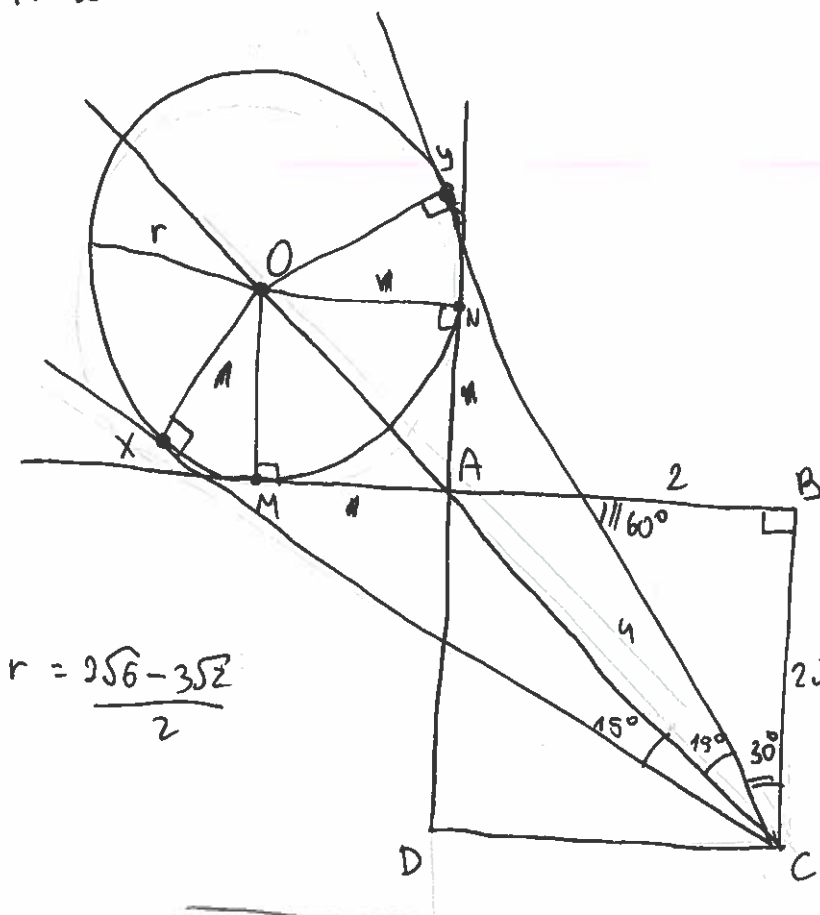
$$\frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = 64 + 20 + 6 \left(\frac{a^5}{243} \cdot \frac{3}{a} + \frac{a \cdot 243}{3a^5}\right) - 15 \left(\frac{a^4}{81} \cdot \frac{9}{a^2} + \frac{a^2}{9} \cdot \frac{81}{a^4}\right) =$$

$$= 84 + 6 \left(\frac{a^4}{81} + \frac{81}{a^4}\right) - 15 \left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2}\right) = 84 + 6 \cdot 34 - 15 \cdot 6 = 84 + 204 - 90 = 198$$

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = 198$$

ОТВЕТ: 198

Nº 2



$$r = \frac{256 - 352}{2}$$

Дано: $ABCD$ - квадрат $AB = 2\sqrt{3}$

ХС и УС-КАСАТЕЛЬНЫЕ к $\text{окр}(O; r)$

$$\angle X \text{ or } CY = 30^\circ \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Найтн:р

Решение:

$$1) \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{b}{\sin 90^\circ} \Rightarrow$$

$$253 \quad Oy = r = OC \cdot \sin 15^\circ$$

$$2) OA = r\sqrt{2}$$

3) ~~$\sqrt{58} \sqrt{24} = \sqrt{1392}$~~

$$V = (r\sqrt{2} + 4) \sin 15^\circ$$

~~0.16224~~ $\frac{r}{r\sqrt{2}} + \frac{r}{4} = 6 \text{ in } 15^\circ$

$$\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{4(\sqrt{3}-1) - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{3}-2-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-\frac{3}{2})$$

$$N^0_3$$

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases} +$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

$$(x-20)^2 \geq 0$$

$$(y+2)^2 \geq 0$$

$$(2-23)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ чтобы их сумма была равна 0 нужно, чтобы каждое слагаемое равнялось 0 $\Rightarrow (x-20)^2=0, (y+22)^2=0, (z-23)^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 20; y = -22; z = 23$$

① T8E7: $x=20$; $y=-22$; $z=23$

Задаток 4

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1	1	3	0	7	9
---	---	---	---	---	---

N^o 5

Найдём корни уравнения $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$

$$D = (3k - 9)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

$$x_1 = \frac{-3k + 9 + k - 19}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{-2k - 10}{2(k^2 - 2k + 1 - 36)} = \frac{2(-k - 5)}{2((k - 1)^2 - 36)} = \frac{-k - 5}{(k - 7)(k + 5)}$$

$$x_2 = \frac{-3k + 9 - k + 19}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{28 - 4k}{2(k - 7)(k + 5)} = \frac{2(14 - 2k)}{2(k - 7)(k + 5)} = \frac{14 - 2k}{(k - 7)(k + 5)}$$

ОДЗ: $k \neq 7$ $k \neq -5$, а т.к. $k \in [8; 13] \Rightarrow$ ничего не выкалывается

Подставим 8 и 13 (min и max) вместо k :

$$k = 8: x_1 = \frac{-8 - 5}{(8 - 7)(8 + 5)} = \frac{-13}{13} = -1$$

$$x_2 = \frac{14 - 16}{(8 - 7)(8 + 5)} = \frac{-2}{13} \Rightarrow x_1 < 2x_2$$

$$k = 13: x_1 = \frac{-13 - 5}{(13 - 7)(13 + 5)} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{14 - 2 \cdot 13}{(13 - 7)(13 + 5)} = -\frac{2}{15} \Rightarrow x_1 > 2x_2$$

По условию надо найти корни, удовлетворяющие условию $x_1 \leq 2x_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ найдём k , при котором $x_1 = 2x_2$

$$\frac{-k - 5}{(k - 7)(k + 5)} = \frac{2(14 - 2k)}{(k - 7)(k + 5)} \Rightarrow \frac{-k - 5 - 28 + 4k}{(k - 7)(k + 5)} = 0 \Rightarrow \frac{3k - 33}{(k - 7)(k + 5)} = 0 \Rightarrow \cancel{3k - 33}$$

$$\Rightarrow \frac{3(k - 11)}{(k - 7)(k + 5)} = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \text{ при } k = 11$$

148

Как мы выяснили, найдя x_1 и x_2 при $k = 8$ и $k = 13$, условие $x_1 \leq 2x_2$
 выполняется при $k \in [8; 11] \Rightarrow$ вероятность, что корни изначально
 данного уравнения удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2 \rightarrow \frac{k \in [8; 11]}{k \in [8; 13]} =$
 $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,666... \Rightarrow$ Ответ: 66.67% *конец*