

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	-	18	12	0	45	СОРОК ПЯТЬ	

реш.

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 \cdot a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$

по условию $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \mid \cdot 3a$

$$a^2 - 9 = 6a$$

$$a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 9 = 2 \cdot 36$$

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{2}$$

$$a_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$$

при $a = 3 + 3\sqrt{2}$: $\left(\frac{3+3\sqrt{2}}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{3+3\sqrt{2}}\right)^6 =$

$$= (1+\sqrt{2})^6 + \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^6 =$$

$$= (1+\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2}-1)^6 =$$

$$= 1 + 6 \cdot 1^5 \cdot \sqrt{2} + 15 \cdot 1^4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 20 \cdot 1^3 \cdot (\sqrt{2})^3 +$$

$$+ 15 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{2})^4 + 6 \cdot 1 \cdot (\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2})^6 - 6 \cdot (\sqrt{2})^5 \cdot 1 + 15 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot 1^2 -$$

$$- 20 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot 1^3 + 15 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1^4 - 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 1^5 + 1^6 =$$

$$= 1 + 15 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 8 + 8 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + 1 = 1 + 30 + 60 + 16 + 60 + 30 + 1 =$$

$$= 198$$

при $a = 3 - 3\sqrt{2}$: $(1-\sqrt{2})^6 + \left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^6 = (1-\sqrt{2})^6 + (-1)^6 \cdot (1+\sqrt{2})^6 =$

$$= 198$$

Ответ: 198

1.11.0

$$(ab)c = a(bc)$$

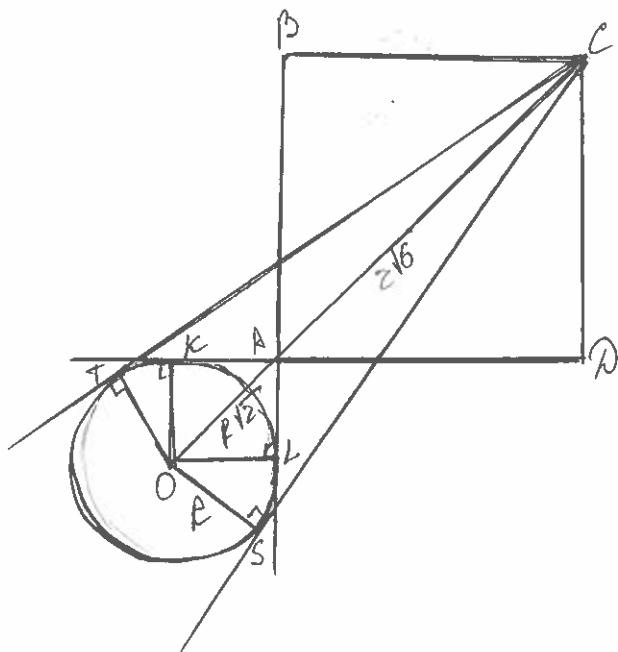
$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

№2.



Дано:

ABCD - квадрат

$$AB = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

Окр($O; R$) касается продолжений AB и AD

CT, CS - касательные к окр($O; R$)

$$\angle TCS = 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

R = ?

Решение.

1) $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OT \perp CT$; $OS \perp CS$ (как радиусы, проведенные в точку касания), т.е. $\angle OKA = \angle OLA = \angle OSC = \angle OTC = 90^\circ$

Т.к. окр($O; R$) вписана в $\angle TCS$, то её центр лежит на биссектрисе этого угла, т.е. $\angle OCS = \frac{1}{2} \angle TCS$; $\angle OCS = 15^\circ$

2) В 4-х уг. OKAL: $OK = OL$

$$\angle OKA = \angle OLA = \angle KAL = 90^\circ$$

($\angle KAL = \angle BAD$ по св-ву вертикальных углов), т.е. $\angle KAL = 90^\circ$)

Значит, OKAL - квадрат; $AL = OL = R$

3) $\triangle OLA$ по т. Пифагора $AO^2 = OL^2 + AL^2$

$$AO = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} \text{ (см)}$$

4) $\triangle ADC$ по т. Пифагора: $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$$AC = \sqrt{12 + 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}$$

5) $\triangle CSO$: $\sin OCS = \frac{OS}{OC}$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{R\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

$$2R\sqrt{2} = R\sqrt{6} - R\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{6} \quad | : \sqrt{2}$$

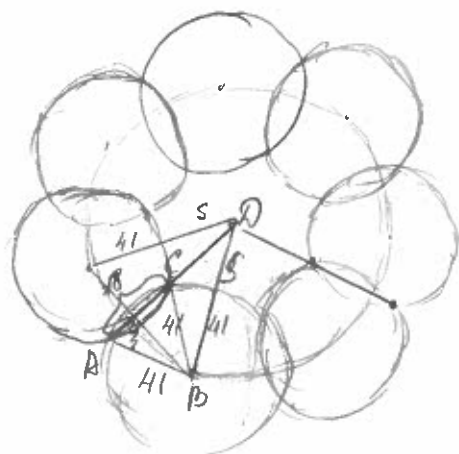
$$2R\sqrt{2} - R\sqrt{6} \quad 2R = R\sqrt{3} - R + 6 - 2\sqrt{3}$$

$$3R - R\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3}$$

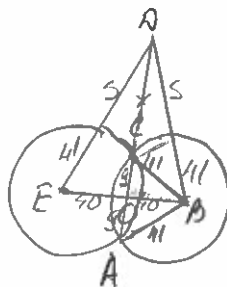
$$R = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3 - \sqrt{3}} = 2 \text{ (см)}$$

Ответ: 2 см

~4.



Из условия следует, что
 $AC = 18 \text{ км}$; $r = 41 \text{ км}$



$BE \perp AC$; $BE \cap AC = O$ где

$CO = OA$. Т.е. $CO = OA = 9 \text{ (км)}$

$\triangle BOC$ по т. Пифагора

$$BC^2 = CO^2 + BO^2$$

$$OB = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{(41+9)(41-9)} = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{25 \cdot 64} = 40 \text{ (км)}$$

$$EO = OB = 40 \text{ км}$$

$\triangle EOB$ - $\triangle$ ($EO = BO = 41 + S$)

~~$\triangle EOB$~~ ; $\triangle EOB$ по т. косинусов:

$$EB^2 = EO^2 + BO^2 - 2 \cdot EO \cdot BO \cdot \cos \angle EOB$$

$$6400 = (41+S)^2 \cdot 2 - 2 \cdot (41+S)^2 \cdot \cos \angle EOB$$

$$\cos \angle EOB = \frac{(41+S)^2 \cdot 2 - 6400}{2(41+S)^2} = \frac{(41+S)^2 - 3200}{(41+S)^2}$$

$$\angle EOB = 2 \angle OAB \quad \angle EOB = 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\frac{(41+S)^2 - 3200}{(41+S)^2} = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \frac{(41+5)^2 - 3200}{(41+5)^2}}{1} = \frac{(41+5)^2 - (41+5)^2 + 3200}{(41+5)^2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1600}{(41+5)^2}; \quad \sin \alpha = \left| \frac{40}{41+5} \right| = \frac{40}{41+5}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1600}{(41+5)^2} = \frac{(41+5)^2 - 1600}{(41+5)^2}; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{(41+5)^2 - 1600}}{41+5}$$

$$\cos \alpha = \frac{40}{\sqrt{(41+5)^2 - 1600}}$$

$$\text{Из } \triangle NOB \quad \cos \alpha = \frac{OB}{NO}; \quad \cos \alpha = \frac{40}{9+x}$$

$$\frac{40}{9+x} = \frac{\sqrt{(41+5)^2 - 1600}}{41+5}; \quad x+9 = \frac{(41+5) \cdot 40}{\sqrt{(41+5)^2 - 1600}}$$

~~1600~~

$$x = \frac{(41+5) \cdot 40}{\sqrt{(41+5)^2 - 1600}} - 9$$

Тогда $\triangle NOB$ по теореме Пифагора

$$NB^2 = NO^2 + OB^2; \quad \underline{741+5 = a}$$

$$\text{Значит } a^2 = \left(\frac{a \cdot 40}{\sqrt{a^2 - 1600}} - 9 + 9 \right)^2 + 1600$$

$$a^2 - 1600 = \frac{1600a^2}{a^2 - 1600}$$

$$a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot 1600 + (1600)^2 = 1600a^2$$

$$a^4 - 3 \cdot 1600a^2 + (1600)^2 = 0$$

$$7a^2 = \pm; \quad + \pm > 0$$

$$\pm^2 - 3 \cdot 1600\pm + (1600)^2 = 0$$

$$D = 9 \cdot 1600^2 - 4 \cdot 1600^2 = 5 \cdot 1600^2$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

$$t_{1,2} = \frac{3 \cdot 1600 \pm 1600\sqrt{5}}{2} = 3 \cdot 800 \pm 800\sqrt{5}$$

$$a^2 = 3800 + 800\sqrt{5} \quad \text{или} \quad a^2 = 3800 - 800\sqrt{5}$$

$$a^2 = 800(3 + \sqrt{5})$$

$$a^2 = 800(3 - \sqrt{5})$$

$$a = 20\sqrt{2(3 + \sqrt{5})}$$

$$a = 20\sqrt{2(3 - \sqrt{5})}$$

$$41 + 5 = 20\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$41 + 5 = 20\sqrt{6 - \sqrt{5}}$$

$$5 = 20\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - 41$$

$$5 = 20\sqrt{6 - \sqrt{5}} - 41$$

То есть центр
радиуса до центра
объекта на расстоя-
нии $20\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - 41 + 41 =$
 $= 20\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ (км)

$$20\sqrt{6 - \sqrt{5}} - 41 \neq 0$$

$$400(6 - \sqrt{5}) \neq 1681$$

$$2400 - 400\sqrt{5} \neq 1681$$

$$\neq 1681 \neq 400\sqrt{5}, \quad \sqrt{5} > 2,40$$

5 должно быть положительным.

Площадь кольца покрытия составляет:

$$\pi(RC + CA)^2 - \pi \cdot RC^2 = \pi(RC^2 + 2 \cdot RC \cdot CA + CA^2) - \pi RC^2 =$$

$$= 2\pi RC \cdot CA + \pi CA^2$$

$$\Delta DOB \text{ по т. Пифагора } DB^2 = DO^2 + OB^2$$

$$(20\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + 41)^2 = (RC + 9)^2 + 1600$$

$$400(6 + 2\sqrt{5}) + 1681 + 2 \cdot 20 \cdot 41\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - 1600 = (RC + 9)^2$$

$$2400 + 800\sqrt{5} + 81 + 1600\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (RC + 9)^2$$

$$\sqrt{400 + 800\sqrt{5} + 1600\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} - 9 = RC$$

Тогда площадь кольца:



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

$$2\pi \cdot (\sqrt{400 + 800\sqrt{5}} + 1600\sqrt{6+2\sqrt{5}} - 9) \cdot 18 + \pi \cdot 324 =$$

$$= 36\pi (20\sqrt{1+2\sqrt{5}} + 4\sqrt{6+2\sqrt{5}} - 9) + 324\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: ~~$20\sqrt{6+2\sqrt{5}}$~~

$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$, тогда
расстояние до радара $20\sqrt{5}+20$ (см), площадь

кольца $36\pi (20\sqrt{1+2\sqrt{5}} + 4(\sqrt{5}+1) - 9) + 324\pi =$

$$= 36\pi (20\sqrt{1+2\sqrt{5}} + 4\sqrt{5}+4 - 9) + 324\pi =$$

$$= 36\pi (20\sqrt{6\sqrt{5}+5} - 9) + 324\pi = 720\pi\sqrt{6\sqrt{5}+5} -$$

$$- 324\pi + 324\pi = 720\pi\sqrt{6\sqrt{5}+5} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $20\sqrt{5}+20$ см; $720\pi\sqrt{6\sqrt{5}+5}$ см² Обе
инверсии

$$5. K \in [8, 13]$$

$$(K^2 - 2K - 35)x^2 + (3K - 9)x + 2 = 0 \quad x_1 \leq 2x_2$$

$$(K - 7)(K + 5)x^2 + (K - 3) \cdot 3x + 2 = 0$$

$$D = 9(K^2 - 6K + 9) - (4K^2 + 8K + 140) = 5K^2 - 46K + 221$$

при $K \in [8, 13]$ $D \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{9-3K \pm \sqrt{5K^2-46K+221}}{2(K^2-2K-35)}$$

$$\frac{9-3K - \sqrt{5K^2-46K+221}}{2(K^2-2K-35)} \leq$$

$$\frac{9-3K + \sqrt{5K^2-46K+221}}{K^2-2K-35} \quad | \cdot 2(K^2-2K-35)$$

(при $K \in [8, 13]$)

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$9 - 3k - \sqrt{5k^2 - 46k + 221} = 18 - 6k + 2\sqrt{5k^2 - 46k + 221}$$

$$3k - 9 - 3\sqrt{5k^2 - 46k + 221} \leq 0$$

$$k - 3 - \sqrt{5k^2 - 46k + 221} \leq 0$$

$$k - 3 \leq \sqrt{5k^2 - 46k + 221} \quad k \in [8; 13]$$

$$k^2 - 6k + 9 \leq 5k^2 - 46k + 221$$

$$4k^2 - 40k + 212 \geq 0 \quad | :4$$

$$k^2 - 10k + 53 \geq 0$$

$$D = 9(k^2 - 6k + 9) - 4(k^2 - 2k - 35) \cdot 2 = 9k^2 - 54k + 81 -$$

$$- 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = k^2 - 2 \cdot 19k + 19^2 =$$

$$= (k - 19)^2 \quad \text{так как } k \in [8; 13] \quad \sqrt{(k - 19)^2} = |k - 19| = 19 - k$$

$$x_{1,2} = \frac{9 - 3k \pm (19 - k)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_1 = \frac{9 - 3k + 19 - k}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_2 = \frac{9 - 3k - 19 + k}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_1 = \frac{28 - 4k}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_2 = \frac{-10 - 2k}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_1 = \frac{14 - 2k}{k^2 - 2k - 35}$$

$$x_2 = \frac{-5 - k}{k^2 - 2k - 35}$$

$$x_1 = \frac{2(7 - k)}{(k - 7)(k + 5)}$$

$$x_2 = \frac{-(5 + k)}{(k - 2)(k + 5)}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

Исследовал, что $k \neq -5$

$$x_1 = \frac{-2}{k+5} \quad \text{---}$$

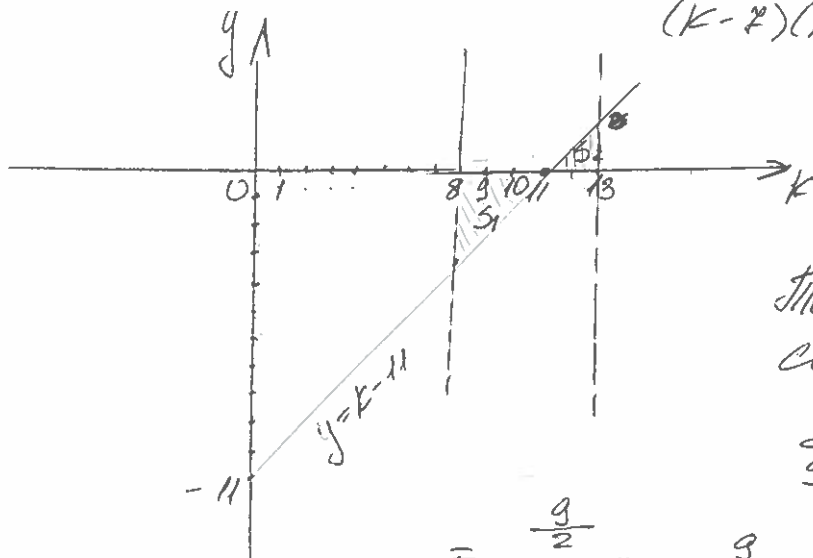
Тогда

$$\frac{2}{k+5} \leq \frac{-2}{k-7}$$

$$\frac{1}{k+5} \geq \frac{1}{k-7}$$

$$\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k-7} \geq 0$$

$$\frac{k-7-k-5}{(k+5)(k-7)} \geq 0$$



$$= \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{4}{2}} = \frac{9}{13}$$

Ответ: $\frac{9}{13}$ - верно

~ 6.

Исследовал, что $k \neq -5$

$$x_2 = \frac{-2}{k-7} \quad \text{---}$$

$$-\frac{1}{k-7} \leq \frac{-4}{k+5} \quad x_1 \leq 2x_2$$

$$\frac{4}{k+5} - \frac{1}{k-7} \leq 0$$

$$\frac{4k-28-k-5}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

$$\frac{3k-33}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

$$\frac{k-11}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

$k-7$ и $k+5$
помощеельны
при $k > 0$.

Тогда вероятное
составляет

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$(ab)c = a(bc)$$

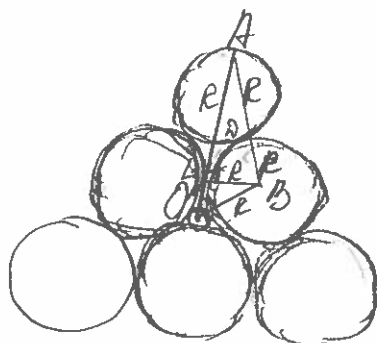
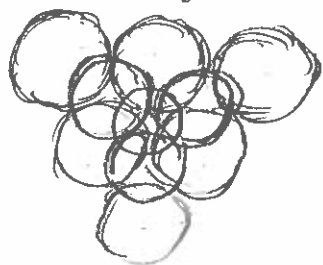
$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 4 8 8 6

Вид пирамиды сверху:



по условию

$$OA = \sqrt{6} + 1$$

7 радиус одинаковых шаров

R , радиус

шара, касающегося

6-ти шаров r , O -центр маленького шара.

AL - общая касат. двух окр., т.е. $BL \perp AO$

$\triangle OLB$ по т. Пифагора: $BO^2 = BL^2 + OL^2$

$$OL = \sqrt{(R+r)^2 - R^2} = \sqrt{2Rr + r^2}$$

$$\text{Тогда } OA = 2\sqrt{2Rr + r^2} + r + R = \sqrt{6} + 1$$

при этом $\sqrt{2Rr + r^2} = BL$ по т. Пифагоре

$$AB^2 = AL^2 + BL^2$$

$$AL = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R$$

$$R + BL = \sqrt{3}R, \quad BL = \sqrt{3}R - R$$

$$BL = LO + r$$

$$\sqrt{3}R - R = \sqrt{2Rr + r^2} + r; \quad OA = \sqrt{3}R + \sqrt{2Rr + r^2} = \sqrt{6} + 1$$

$$3R^2 - 2\sqrt{3}R^2 + R^2 = 2Rr + r^2 + r^2 + 2r\sqrt{2Rr + r^2} \quad |$$

$$4R^2 - 2\sqrt{3}R^2 - 2Rr - 2r^2 = 2r\sqrt{2Rr + r^2}$$

найдём
самый
маленький
 R и r