

Класс 11

Вариант 21

Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	20	30	100	сто	

Задача 1.

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$

Пусть $\frac{a}{3} = t$. Тогда $\frac{3}{a} = \frac{1}{t}$:

$$t - \frac{1}{t} = 2$$

$$\frac{t^2 - 1}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

Если $\frac{a}{3} = 1 + \sqrt{2}$:

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$(1 + \sqrt{2})^6 + (\sqrt{2} - 1)^6 = (\sqrt{2})^6 + 6 \cdot (\sqrt{2})^5 + 15 \cdot (\sqrt{2})^4 + 20 \cdot (\sqrt{2})^3 + 15 \cdot (\sqrt{2})^2 + 6 \cdot \sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2})^6 - 6 \cdot (\sqrt{2})^5 + 15 \cdot (\sqrt{2})^4 - 20 \cdot (\sqrt{2})^3 + 15 \cdot (\sqrt{2})^2 - 6 \cdot \sqrt{2} + 1 = (2^3 + 15 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1) \cdot 2 = (8 + 60 + 30 + 1) \cdot 2 = 99 \cdot 2 = 198$$

Если $\frac{a}{3} = 1 - \sqrt{2}$:

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$$

$$(1 - \sqrt{2})^6 + (-1 - \sqrt{2})^6 = (\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6 = 198$$

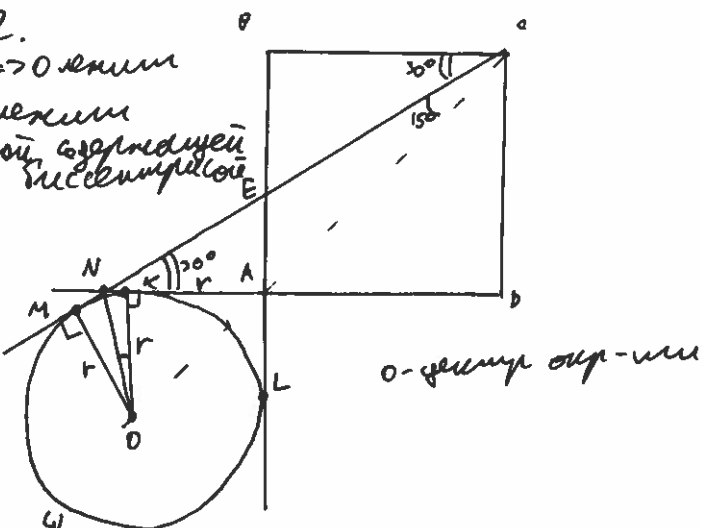
Ответ: 198.

Задача 2.

1) Окружность вписана в $\angle KAL \Rightarrow O$ лежит на биссектрисе $\angle KAL \Rightarrow O$ лежит на биссектрисе $\angle BCD$ (прямой, содержащей диагональ AC , и т.д. от экв. биссектрисой обоих углов)

2) Пусть, если M - точка касания касательной из C к ω , то $\angle MCO = 15^\circ$ (из симметрии отн. CO)

3) $N = CM \cap AD$
 $\angle NCB = 30^\circ = \angle BCA - \angle NCA = \angle CNA$ (как накр. лев. при $BC \parallel AD$ и сек. CN)



4) $OMNK$: $OM = OK = r$, $\angle ONM = \angle ONK = 90^\circ$ (т.к. NO - радиус, пров. в точку касания) $\Rightarrow \triangle ONM \cong \triangle ONK$ (по кат. и гип. и т.д.) $\Rightarrow MN = NK$; ON - биссектриса $\angle MOK$
 Пусть из 3

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 2 0 7 0 8

5) $\angle KOL = 45^\circ$ (ш.к. $OL = AK = r \Rightarrow \triangle KOL$ - прямоугол. равнобедр.)

$$\angle NOC = 90^\circ - \angle HCO = 75^\circ = \angle HOK = 30^\circ \Rightarrow \angle NOK = 15^\circ$$

6) $\text{Площадь } NK = KO \cdot \sin \angle NOK = r \cdot \sin 15^\circ$

7) $BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{из } \triangle CBE \quad BE = 2, CE = 4$

$$AE = 2\sqrt{3} - 2$$

8) $\text{Площадь } \frac{AE}{AN} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}-2}{AK+MK} = \frac{2\sqrt{3}-2}{r(1+\tan 15^\circ)}$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; 15^\circ \in (0; 90^\circ) \Rightarrow \cos 15^\circ > 0 \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad (\cos 15^\circ \text{ найдем из осн. триг. тожд.})$$

$$9) \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}-2}{r(1+\tan 15^\circ)}$$

$$r\sqrt{3}(1+\tan 15^\circ) = 6\sqrt{3}-6$$

$$r = \frac{6-2\sqrt{3}}{1+\tan 15^\circ} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2$$

Ответ: 2.

Задача 3.

Сложим все уравнения системы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0$$

$$(x^2 - 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 - 46z + 529) = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

рав. достигается только в случае, когда $x=20, y=-22, z=23$.

Пусть подставим угадаем, что $(20; -22; 23)$ - решение системы.

Ответ: $x=20; y=-22; z=23$.

Задача 5.

Найдем корни уравнения $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$:

$$D = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = (k - 19)^2$$

Потому корни ур-я всегда равны

$$x_1 = \frac{9-3k \pm |k-19|}{2(k^2-2k-35)}; x_2 = \frac{-10-2k}{2(k^2-2k-35)}$$

Найдем такие k , что $x_1 \leq 2x_2$:

$$\frac{28-4k}{2(k^2-2k-35)} \leq \frac{-20-4k}{2(k^2-2k-35)} \quad | \cdot 2 > 0 \Rightarrow \text{знак не сменился}$$

$$\frac{28-4k}{k^2-2k-35} \leq \frac{-20-4k}{k^2-2k-35}$$

$$\frac{48}{k^2-2k-35} \leq 0 \quad | \cdot \frac{1}{48} > 0$$

$$\frac{1}{(k+5)(k-7)} \leq 0$$

$$\frac{+}{-5} \quad \frac{-}{7} \quad \frac{+}{+} \quad k$$

нам k , принадлежащих в промежутке $[8; 13]$

Тогда в искомая вероятность равна $\frac{13-8}{13-5} = \frac{5}{8} = 0,6$

Ответ: 0,6.

Проверим наши корни $(x_1; x_2) = (\frac{-10-2k}{2(k^2-2k-35)}; \frac{28-4k}{2(k^2-2k-35)})$

$$\frac{-10-2k}{2(k^2-2k-35)} \leq \frac{56-8k}{2(k^2-2k-35)}$$

$$\frac{-10-2k}{k^2-2k-35} \leq \frac{56-8k}{k^2-2k-35}$$

$$\frac{6k-66}{(k+5)(k-7)} \leq 0$$

$$\frac{k-11}{(k+5)(k-7)} \leq 0$$

$$\frac{-}{-5} \quad \frac{+}{7} \quad \frac{-}{11} \quad \frac{+}{+} \quad k$$

В промежутке $[8; 13]$ принадлежат $k \in [8; 11]$

удовлетворяют $k \in [8; 11]$

Лист 2 из 3

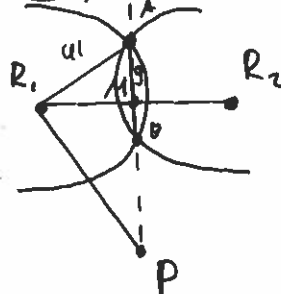
ШИФР

1 2 0 7 0 8

Задача 4.

Рассмотрим два соседних* радара. П.к. покрыто камушком, то круги покрытия* соседних по окружности, т.к. по условию радара должны располагаться на одинаковом расстоянии от центра платформы

Этих радаров пересекаются:
Также то, ~~отражение~~ длина их общей хорды должна составлять хорду $\pi \cdot 18$ (шаре на ~~векторе~~ прямой, сод. бис. хорду и прот. через центр. камушка хорды будет ~~выскакой~~ отрезок длиной ~~меньше~~ чем 18).



Длина бис. хорды прямо зависит от расст. до платформы $\rightarrow$ максимальное расстояние до радаров будет достигаться при $\alpha = 18^\circ$.
 R_1, A, R_2, B - ромб; $AM = BM = 9 \Rightarrow$ из $\triangle AR_1M$ по ш. Пифагора $R_1M = 40$.

Всего радаров 7. $PR_1 \sim R_1M$ (прямо пропорционально) $\rightarrow$ максимальное расст. до всех платформ достигается при $\angle R_1PR_2 = \frac{360^\circ}{7}$ (для любой пары соседних платформ) $\Rightarrow \angle R_1PM = \frac{\angle R_1PR_2}{2}$ (т.к. $R_1P = R_2P$) $= \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow R_1P = \frac{R_1M}{\sin \angle R_1PM} = \frac{40}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$

$$PR = PM + BM = \frac{R_1M}{\sin \angle R_1PM} - 9 = \frac{40}{\sin \frac{180^\circ}{7}} - 9$$

$$PA = PM + AM = \frac{40}{\sin \frac{180^\circ}{7}} + 9$$

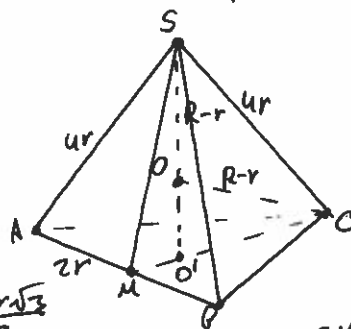
Площадь камушка равна $\pi PA^2 - \pi PB^2 = \pi (PA + PB)(PA - PB) = \pi \cdot 18 \cdot \frac{80}{\sin \frac{180^\circ}{7}} =$

$$= \frac{1440\pi}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$$

Ответ: на макс. расст. $\frac{40}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$; площадь $\frac{1440\pi}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$.

Задача 6.

Пусть радиус шаров равен r , радиус описанной сферы $R = \sqrt{6} + 1$.
Рассмотрим пирамиду с вершинами в центрах шаров, явл. вершинами пирамиды из шаров:



$\triangle ABC$ - прав. пирамида

O - центр сферы из уш. - центр. ш. сферы $\triangle ABC$ с рад. $R-r$ (т.к. ш. сферы из уш. касалась шаров - вершин пирамиды из шаров).

$$SA = 4r$$

$$O' - \text{центр } \triangle ABC \Rightarrow CO' = \frac{2}{3} \cdot CM = \frac{2}{3} \cdot 2r\sqrt{3} = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$$

$$SO = CO = R-r \Rightarrow N - \text{ср. } SC$$

$$\frac{ON}{SO} = \frac{2r}{R-r} = \frac{SO'}{SC} = \cos \angle OSC$$

$$\frac{2r}{R-r} = \frac{\frac{4r\sqrt{6}}{3}}{4r} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$6r = \sqrt{6}(R-r)$$

$$6 + \sqrt{6}r = 6 + \sqrt{6}$$

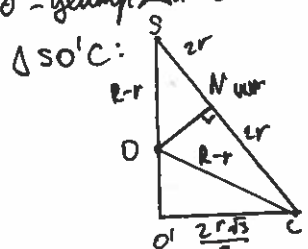
$$r = 1$$

$$SM = 2r\sqrt{3}$$

$$O'M = \frac{1}{3} \cdot SM = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{из } \triangle SO'M \text{ по ш. Пифагора}$$

$$SO' = \frac{4r\sqrt{6}}{3}$$



Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

Потом ON - расстояние от центра иск. сферы до центра одного из шаров, с кот. она касается - равно $\sqrt{2}$ (из $\triangle SON$ по ш. Пифагора) тогда радиус сферы должен быть равен $ON - r = \sqrt{2} - 1$ или 3 из 3