

ШИФР

110170

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания Горный университет

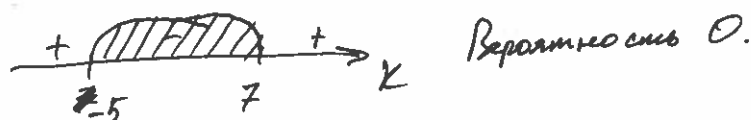
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	7	15	14	20	-	-	-	-	-	61	шестьдесят один	

N5

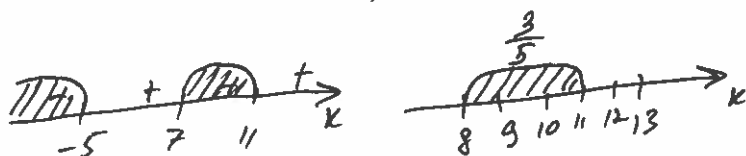
$$x_{1,2} = \frac{9-3k \pm \sqrt{9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280}}{2(k-7)(k+5)} = \frac{9-3k \pm (k-19)}{2(k-7)(k+5)}$$

$$1) x_2 = \frac{9-3k+k-19}{2(k-7)(k+5)} = \frac{1}{7-k}; x_1 = \frac{9-3k-k+19}{2(k-7)(k+5)} = \frac{4(7-k)}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-2}{k+5}$$

$$\frac{-2}{k+5} \leq \frac{1}{7-k}; \frac{-2(7-k)-2(k+5)}{(k+5)(7-k)} \leq 0; \frac{-14+2k-2k-10}{(k+5)(7-k)} \leq 0; \frac{-24}{(k+5)(7-k)} \leq 0$$



$$2) x_1 = \frac{1}{7-k}; x_2 = \frac{-2}{k+5}; \frac{1}{7-k} \leq \frac{-4}{k+5}; \frac{k+5+28-4k}{(7-k)(k+5)} \leq 0; \frac{3(11-k)}{(7-k)(k+5)} \leq 0$$



Итак, если корни уравнения располагаются как $x_1 = \frac{-2}{k+5}$ а $x_2 = \frac{1}{7-k}$, то вероятность $x_1 \leq 2x_2$ равна 0. Если корни располагаются как $x_1 = \frac{1}{7-k}; x_2 = \frac{-2}{k+5}$, то вероятность $x_1 \leq 2x_2$ равна 0,6.

Ответ: 0 или 0,6.

1 из 3 мес.

ШИФР

1 1 0 1 4 0

2 и 3 мст.

N1

$$\frac{a^{12} + 729b^{12}}{729a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6}; \text{ Пусть } \frac{a}{3} = n; \text{ тогда } n - \frac{1}{n} = 2;$$

$$n^2 - 2n - 1 = 0; n = 1 \pm \sqrt{2}. \quad \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = n^6 + \frac{1}{n^6}$$

По формуле бинома Ньютона раскроем n^6 : ~~или~~ при $n = 1 + \sqrt{2}$:

$$(1 + \sqrt{2})^6 = 1 + 6\sqrt{2} + 30 + 40\sqrt{2} + 60 + 24\sqrt{2} + 8 = 99 + 70\sqrt{2}.$$

$$n^6 + \frac{1}{n^6} = 99 + 70\sqrt{2} + \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} = 99 + 70\sqrt{2} + \frac{99 - 70\sqrt{2}}{(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2})} =$$

$$= 99 + 70\sqrt{2} + \frac{99 - 70\sqrt{2}}{9801 - 9800} = 99 + 70\sqrt{2} + 99 - 70\sqrt{2} = 2 \cdot 99 = 198.$$

$$\text{при } n = 1 - \sqrt{2}: (1 - \sqrt{2})^6 = 1 - 6\sqrt{2} + 30 - 40\sqrt{2} + 60 - 24\sqrt{2} + 8 = 99 - 70\sqrt{2}.$$

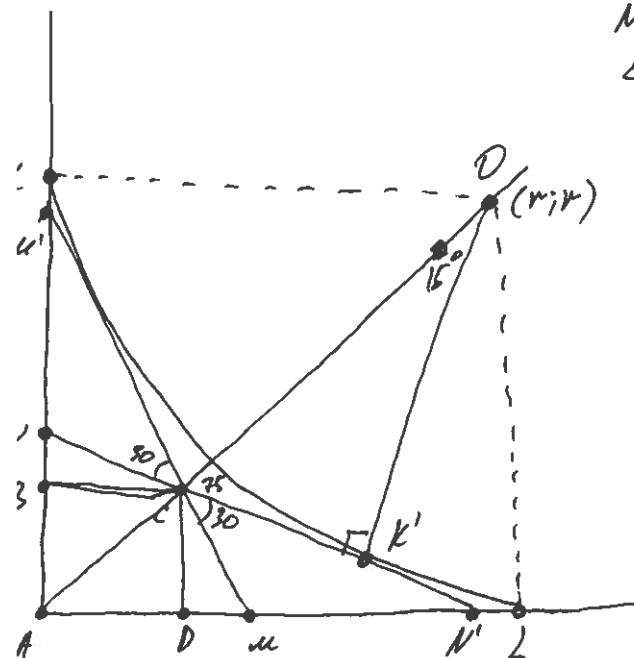
$$n^6 + \frac{1}{n^6} = 99 - 70\sqrt{2} + \frac{1}{99 - 70\sqrt{2}} = 99 - 70\sqrt{2} + \frac{99 + 70\sqrt{2}}{(99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})} =$$

$$= 99 - 70\sqrt{2} + \frac{99 + 70\sqrt{2}}{9801 - 9800} = 99 - 70\sqrt{2} + 99 + 70\sqrt{2} = 198.$$

Итак, ~~или~~ мы получили однозначный ответ 198.

Ответ: 198.

N2



NN' и MM' - касательные. $\angle MCN' = 30^\circ$; $\angle M'CN' = 150^\circ$; AD - биссектриса $\angle M'CN' \Rightarrow \angle OCN' = 75^\circ$; $\angle CDK' = 75^\circ$.

Пусть $OL = AL = r$. тогда $AO = r\sqrt{2}$.

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{3}-1}{(2\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$OK' = r \Rightarrow OC = \cos 15^\circ \cdot OK' = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$AC + CO = AO = r\sqrt{2}. \quad 2\sqrt{3} + \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = r\sqrt{2}.$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} + r\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}r; \quad r(2\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}) = 4\sqrt{3}$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\text{Ответ } \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}} - \text{ неверно}$$

ШИФР

1 1 0 1 7 0

3 и 3 мес.

N3

Сложите 1, 2 и 3 выражения:

$x^2 + y^2 + z^2 + 44y - 46z - 40x + 1413 = 0$. Дополним до полных квадратов:

$$(x^2 - 40x + 20^2) + (y^2 + 44y + 22^2) + (z^2 - 46z + 23^2) - 20^2 - 22^2 - 23^2 + 1413 = 0.$$

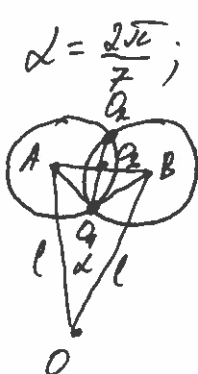
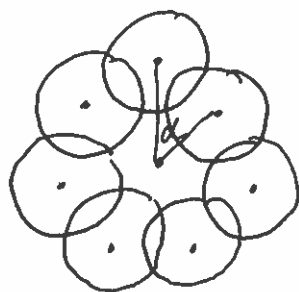
$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 1413 - 1413$$

$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0 \Rightarrow$ Корнями $\frac{3}{3}$ системы могут быть только $x = 20; y = -22; z = 23$. Подставим:

$$\begin{cases} 20^2 + 22 \cdot 22 - 69 \cdot 23 + 703 = 0 \\ 22^2 + 23 \cdot 20 + 23 \cdot 23 - 1473 = 0 \\ 23^2 - 63 \cdot 20 + 66 \cdot 22 + 2183 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Единственным решением системы является } (20; -22; 23)$$

Ответ: $(20; -22; 23)$.

N4



$\alpha = \frac{2\sqrt{e}}{7}$; все радиусы равноудалены от центра. $= e$.

$AO_1 = BO_1 = 41$. $O_1O_2 = 18$. $O_1O_2 \perp AB$ в силу симметрии и равенства кругов.

$$O_1O_3 = \frac{1}{2} O_1O_2 = 9. \quad AO_3 = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$$

$$AB = 2AO_3 = 80.$$

$$AB = \sqrt{e^2 + e^2 - 2e^2 \cdot \cos \alpha} = e \sqrt{2 - 2\cos \alpha}.$$

$$e \sqrt{2 - 2\cos \alpha} = 80; \quad e = \frac{80}{\sqrt{2 - 2\cos \alpha}} = \frac{80}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}}$$

Находим e и S из уравнения

$$S = \left(\frac{80}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}} + 18 \right) \cdot \sqrt{e} - \left(\frac{80}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}} \right)^2 \cdot \sqrt{e} = \sqrt{e} \left(18 \cdot \frac{160}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}} \right)$$

$$= \frac{288\sqrt{e}}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}}$$

Ответ: $e = \frac{80}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}}$; $S = \frac{288\sqrt{e}}{\sqrt{2 - 2\cos \frac{2\sqrt{e}}{7}}}.$

инверсия