

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	14	18	14	76	семьдесят шесть	

$$\textcircled{1} A_7 \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} = 4 \Leftrightarrow$$

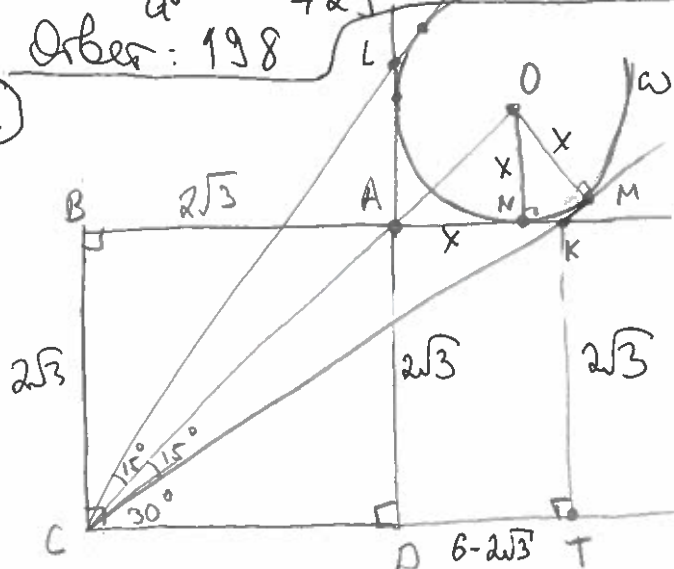
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} = 6 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} \right)^3 = 6^3 = 216 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{729} + 3\left(\frac{a^2}{9}\right) \cdot \frac{9}{a^2} + 3\frac{a^2}{9} \cdot \left(\frac{9}{a^2}\right)^2 + \frac{729}{a^5} = 216 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} \right) + \frac{a^2}{3} + \frac{27}{a^2} = 216 \Leftrightarrow \left(\frac{729}{a^6} + \frac{a^6}{729} \right) + \underbrace{3 \left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} \right)}_{6 (*)} = 216$$

$$\Rightarrow A = \frac{729}{9^0} + \frac{9^0}{729} = 216 - 3.6 = 216 - 18 = 198$$

Orbes: 198



(картинка симметрична относительно (AC))

0 равною от $[AK)$ и $[AL)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0$ лежит на бис-сектрисе

$\Rightarrow$ O лежит на бис-се $\hat{KAL}$ по св-ву квадрата ($\hat{CAD} = 45^\circ$)

по св-ву касательных к окр-ту:

$$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_M = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$\Delta x = \Delta m = \frac{1}{2} = 13$
 Δx - разность ω , range $|a_n| = |a_m| = X$

$(OM) \perp (AK)$, $\angle OMC = 90^\circ$ по св-ву касательных
 $|MK| = |KM|$ по св-ву касательных

$|NK| = |KM|$ по св-ву касательных

$\triangle KTD$ - прямоугольный (по построенной точке T) $\Rightarrow |KT| = |AD| = 2\sqrt{3}$

$$\angle KCT = \angle ACT - \angle ACK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$|CK| = \frac{|KT|}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3}; \quad |CT| = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 6; \quad |AT| = |CT| - |CO| = 6 - 2\sqrt{3} = |AK|$$

$\widehat{OAN} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AON$ - 45° $\Rightarrow |AN| = |ON| = x$; $|KM| = |NK| = |AK| - x = |DT| - x = 6 - 2\sqrt{3} - x$

$$|CM| = |CK| + |KM| = 4\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} - x = 6 + 2\sqrt{3} - x$$

$$\text{us } \Delta MOC \text{ (npumay)} \quad \frac{|OM|}{|CM|} = \tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}; \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

2 лист

продолж №2

$$\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\frac{|OM|}{|CM|} = \frac{x}{6+2\sqrt{3}-x} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow x = (2-\sqrt{3}) \cdot (6+2\sqrt{3}-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 12 + 4\sqrt{3} - 2x - 6\sqrt{3} - 6 + x\sqrt{3} \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x(1+2\sqrt{3}-\sqrt{3}) = 6-2\sqrt{3} \Leftrightarrow x(3-\sqrt{3}) = 6-2\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ: 2.

⑤ $(k^2-2k-35)x^2 + (3k-9)x + 2 = 0$; по теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{2}{k^2-2k-35}$

замечим, что $\frac{-2}{k+5}$ и $\frac{-1}{k-7}$ подх под усл, т.е. корни

$k \in [8; 13] \Rightarrow \begin{cases} k+5 > 0 \\ k-7 > 0 \end{cases} \quad \text{т.е. только } k \text{ из } [8; 13]:$

~~$k \in [8; 13] \Rightarrow \begin{cases} k+5 > 0 \\ k-7 > 0 \end{cases} \quad \text{т.е. только } k \text{ из } [8; 13]:$~~

~~$k \in [8; 13] \Rightarrow \begin{cases} k+5 > 0 \\ k-7 > 0 \end{cases} \quad \text{т.е. только } k \text{ из } [8; 13]:$~~

Считаем, что если мы нашли 2 корня x_1 и x_2 , то проверяем, что $x_1 \leq 2x_2$ и $x_2 \leq 2x_1$, если одно из них верно - второе выполнено

$x_1 = \frac{-2}{k+5}, x_2 = \frac{-1}{k-7}$

$x_1 \leq 2x_2 \Leftrightarrow \frac{-2}{k+5} \leq \frac{-2}{k-7} \Leftrightarrow -2k+14 \leq -2k-10 \Leftrightarrow 14 \leq -10$ - никогда не верно

$x_2 \leq 2x_1 \Leftrightarrow \frac{-1}{k-7} \leq \frac{-4}{k+5} \Leftrightarrow -k-5 \leq -4k+28 \Leftrightarrow 3k \leq 33 \Leftrightarrow k \leq 11$

т.о. при $k \in [8; 13]$ только $k \leq 11$ подх ($[8; 11]$ - подх, $(11; 13]$ - нет)
 $\Rightarrow$ вероятность (p): $p = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 60\%$

если считать, что корни упорядочены (т.е. мы их находим в случайном порядке, говорим, что x_1 равен первому, x_2 равен второму и проверяем) тогда шанс, что корни удовлетворяют условию равен $p \cdot 50\% = 0,6 \cdot 0,5 = 30\%$ (т.к. (*) не при каких k не случается)
 Ответ: в I нотации - 60%, во II нотации - 30%

$(ab)c = a(bc)$

$E = mc^2$



ШИФР

1 0 9 3 7 1

③ Р.С.у.

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 - 46z + 529) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0$$

*) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \begin{cases} (x - 20)^2 \geq 0, \text{ равенство только при } x = 20 \\ (y + 22)^2 \geq 0, \text{ равенство только при } y = -22 \\ (z - 23)^2 \geq 0, \text{ равенство только при } z = 23 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 \geq 0, \text{ рав-во только при } (x - 20)^2 = 0, (y + 22)^2 = 0, (z - 23)^2 = 0, \text{ т.е. } x = 20, y = -22, z = 23$$

(*) Т.О. единств. возм. решение $(20, -22, 23)$ (можно объяснить тем, что это центр сферы с радиусом 0, т.е. только точка $(20, -22, 23)$)

осталось проверить, что оно подх:

$$\begin{aligned} x^2 - 22y - 69z + 703 &= 400 + 484 - 1587 + 703 = -703 + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 &= 484 + 460 + 529 - 1473 = 944 + 529 - 1473 = 1473 - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 &= 529 - 1260 + 1452 + 2183 = 2712 - 2712 = 0 \end{aligned}$$

Ответ: $\{(20, -22, 23)\}$

158

$(ab)c = a(bc)$

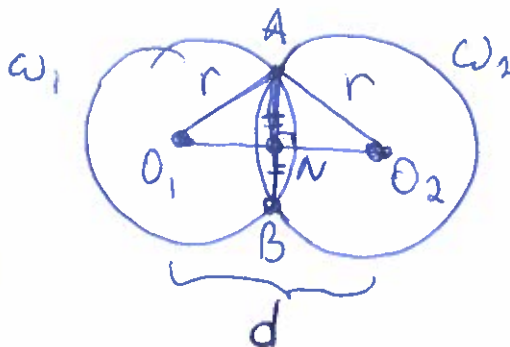
$E = mc^2$



ШИФР

1 0 9 3 7 1

④ * 2 радара:



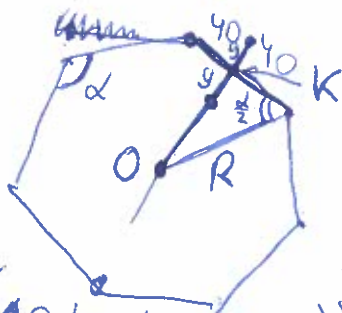
d - расст между радарами

$|AB|$ = ширина кольца

т.к. $|AB| < 2r$ ($d \neq 0$) то ширину кольца опре-
именно $|AB|$

$|AB| = 18 \Rightarrow |AN| = 9$ (O_1, O_2 - середины перпендикуляр к $[AB]$)
 $|NO_2| = |NO_1|$ (радиусы ω_1 и ω_2 равны) =
 $= \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = 40$ (км)

т.о. расст между 2 радары должно быть 80 (км)
 т.о. имеем правильный 7-угольник (по усл это должно
 быть кольцо, мы докажем, что у многог, впис в это кольцо
 равны все стороны), со стороной 80 (км)

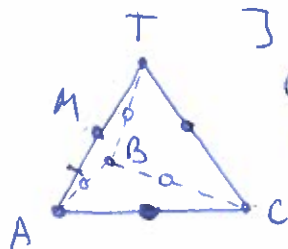


$7\alpha = (7-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$
 $\frac{\alpha}{2} = 64 \frac{2}{7}$
 $|OK| = 40 \tan(64 \frac{2}{7}^\circ)$ (сб-во прав. многог.)

$S_K = \pi (|OK| + 9)^2 - \pi (|OK| - 9)^2 = 36\pi |OK|$
 $= \pi (18|OK| + 18|OK|) = 36\pi |OK| = 144\pi \tan(64 \frac{2}{7}^\circ)$
 Ответ: $144\pi \tan(64 \frac{2}{7}^\circ)$

145

6



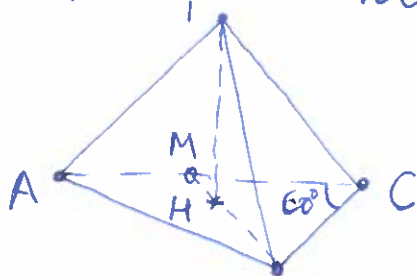
ТАВС - пирамида, α - радиус
 середины ребер и Т, А, В, С -
 центры шаров пирамиды

ТАВС - прав тетраэдр, т.к. $|AT| = |BT| = |CT| = |AB| = |BC| = |CA| = r$,
 где r - радиус мал. шара пирамиды

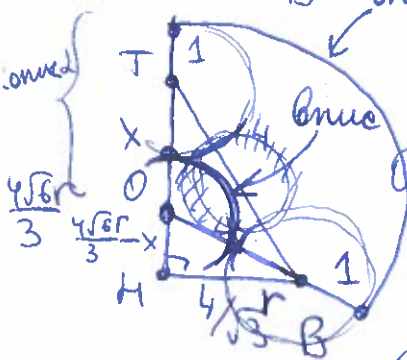


$R_{\text{опис}} \alpha$ - радиус опис. сферы α
 $R_{\text{впис}} \alpha$ - радиус впис. шара α
 $R_{\text{опис}} \text{ТАВС}$, $R_{\text{впис}} \text{ТАВС}$ - аналогично

r - радиус мал. сферы и впис. очевидно, что центр опис. сферы пирамиды α совп с центром впис. и опис. сфер ТАВС (в силу того, что пирамиду можно "поставить" на другую грань и она при этом с точки зрения геометрии не изменится) центр опис. сфер правильного тетра. лежит на высоте [TH]



H - центр равностороннего $\triangle ABC$
 $|HB| = \frac{2}{3} |BM|$ (H - в частности т. пересечения медиан, по св-ву медиан)
 $|HB| = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}r = \frac{4\sqrt{3}}{3}r$



$$|TH| = \sqrt{|TB|^2 - |HB|^2} = r\sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}r$$

$$|OT| = |OB| \Leftrightarrow \left(\frac{4\sqrt{6}r}{3} - x\right)^2 + \frac{16r^2}{3} = x^2 \Leftrightarrow \frac{16 \cdot 8r^2}{9} + x^2 - \frac{8\sqrt{6}}{3}xr + \frac{16r^2}{3} = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{48/3 r}{8\sqrt{6}/3} = \frac{6r}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{6}r = R_{\text{опис}} \text{ТАВС}$$

$$R_{\text{опис}} \alpha = (\sqrt{6} + 1)r \text{ (еще унас. радиус маленькой сферы)}$$

$$R_{\text{впис}} \alpha = R_{\text{опис}} \text{ТАВС} - r = R_{\text{опис}} \alpha - 2r = \sqrt{6} - 1$$

$$R_{\text{впис}} \alpha = \sqrt{6} - 1 \Rightarrow r = 1 \text{ Ответ: } \sqrt{6} - 1$$