

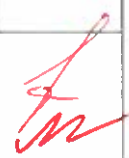
Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 41 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания ФГАОУ ВО Северо-Восточный Федеральный университет им. М.Ф. Ломоносова

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	—	17	2	—	—	—	—	49	сорок девять	

№6

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ xy+yz+xz=18 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=100-36=64$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=2+48$$

$$\begin{cases} xy=z^2-10z+18 \\ xz=y^2-10y+18 \\ yz=x^2-10x+18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy &= b \\ \Rightarrow z &= 10-a \\ z(y+x)+xy &= 18 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} z=10-a \\ z=\frac{18-b}{a} \end{cases} \Rightarrow a^2-10a+18-b=0$$

$$\begin{cases} a_1+a_2=10 \\ a_1a_2=18-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=z, x+y=z \\ z=5 \\ x+y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+5y+5x=18 \\ x^2+y^2+25=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+25=18 \\ x^2+y^2=39 \end{cases}$$

Бланк олимпиадной работы

М1

$$\frac{a^{12}-729}{27a^6} = \frac{a^{12}-3^6}{3^3a^6} ; \quad \frac{a^2-3}{3} \cdot \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^4-3^2}{3a^2} = 6 - \text{возведём в куб}$$

$$\frac{a^{12}-3 \cdot a^8 \cdot 3^2 + 3 \cdot a^4 \cdot 3^4 - 3^6}{27a^6} = 216$$

$$\frac{a^{12}-3^6}{3^3a^6} + \frac{3^5a^4-3^3a^8}{3^3a^6} = 216 \Rightarrow \frac{a^{12}-3^6}{3^3a^6} = 216 - \frac{3^8a^4(3^2-a^4)}{3^3a^6}$$

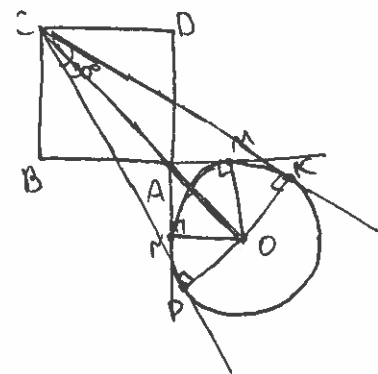
$$\frac{a^{12}-3^6}{3^3a^6} = 216 - \frac{3^2-a^4}{a^2} ; \quad \frac{a^4-3^2}{a^2} = 6 \cdot 3 = 18$$

58

$$\frac{a^{12}-3^6}{3^3a^6} = 216 + 18 = 234$$

Ответ: 234

М2



Дано: квадрат ABCD, окр-ть, $AM=AN=2$ см, $\angle PCK=30^\circ$

Найти: BC

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle AMO$:

$\angle MAO = 45^\circ$ (AO - биссектриса $\angle MAM$ по св-ву касательных)

$\angle AMO = 90^\circ$ (радиус в точку касания)

$AM=OM=2$ (см) $\Rightarrow AO = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ (м. Пифагора)

2) Проведём CO, AO лежит на CO, т.к. это обе прямые, являющиеся биссектрисами угла 90° .

3) Рассмотрим $\triangle COK$:

$\angle CKO = 90^\circ$ (радиус в точку касания)

$OK=MO=2=R$

Бланк олимпиадной работы

~~100м~~

$\angle OCK = 15^\circ$, т.к. CO - биссектриса $\angle PCK$

$$\sin \angle OCK = \frac{OK}{CO} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow CO = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \text{ (см)}$$

105

$$4) CA = CO - AO = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}$$

$$BC = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$ см

13

$$3x - x^2 + \sqrt{9-x^2}(6x-x^2) = 0 \quad 1) \text{ ОДЗ: } (9-x^2)/(6x-x^2) \geq 0$$

$$2) x/(3-x) + \sqrt{(3-x)(3+x) \cdot x(6-x)} = 0 \quad (3-x)/(x+3)/(6-x) \cdot x \geq 0$$

$$\sqrt{x(3-x)} \cdot \sqrt{x(3-x)} + \sqrt{x(3-x)} \cdot \sqrt{(3+x)(6-x)} = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & + \\ -3 & 0 & 3 & 6 & x \end{array}$$

155

$$\sqrt{x(3-x)} \cdot \sqrt{x(3-x)} + \sqrt{x(3-x)} \cdot \sqrt{(3+x)(6-x)} = 0 \quad \sqrt{x(3-x)} \cdot (\sqrt{x(3-x)} + \sqrt{(3+x)(6-x)}) = 0$$

$$\sqrt{x(3-x)} = 0 \quad \sqrt{x(3-x)} + \sqrt{(3+x)(6-x)} = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x/(3-x)=0 \\ (3+x)/(6-x)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=-3 \\ x=6 \end{cases} \text{ - нет корней, т.к. не совпадают}$$

Ответ: 0; 3

15

$$(k^2+9k-99)x^2+(3k-7)x+2=0$$

$$D = 9k^2 - 49k + 49 - 4 \cdot 2(k^2+9k-99) = k^2 - 58k + 841 = (k-29)^2$$

$$x_1 = \frac{7-3k+k-29}{2k^2+4k-98} = \frac{-11-k}{k^2+9k-99}; \quad x_2 = \frac{7-3k-k+29}{2(k^2+9k-99)} = \frac{18-2k}{k^2+9k-99} \text{ - корни ур-я}$$

Бланк олимпиадной работы

1 случай:

$$\frac{18-2k}{k^2+2k-99} \leq \frac{-22-2k}{k^2+2k-99}$$

$$\frac{18-2k+22+2k}{k^2+2k-99} \leq 0$$

$$\frac{40}{k^2+2k-99} \leq 0$$

$$\frac{+11-11}{-11} \rightarrow \frac{+6-6}{9} \rightarrow k$$

Вероятность = 0

Ответ: $\frac{17}{24}$ - неверно

2 случай:

$$\frac{-11-k}{k^2+2k-99} \leq \frac{36-4k}{k^2+2k-99}$$

$$\frac{3k-47}{k^2+2k-99} \leq 0$$

$$\frac{-6}{-11} + \frac{+6}{9} \rightarrow \frac{47}{3} k$$

~~значит~~ значит $k \in [11; \frac{47}{3}]$

$$\frac{\frac{47}{3} - 11 + 1}{18 - 11 + 1} = \frac{47 - 30}{3} = \frac{17}{3} = \frac{17}{24} - \text{вероятность}$$

175