

# Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МТФУ имени Н. Э. Бауманна

## ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |           | Подпись |
|--------|---|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----------|-----------|---------|
|        |   |    |    |    |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью  |         |
| Оценка | 5 | 10 | 15 | 20 | 20 | — |   |   |   |    | 70       | семьдесят |         |

№1.

$$\left( \frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 4090506 + \sqrt{4092529} =$$

$$20232023 = 2023 \cdot 10000 + 2023 = 2023(10000 + 1) = 2023 \cdot 10001$$

$$20222022 = 2022 \cdot 10000 + 2022 = 2022(10000 + 1) = 2022 \cdot 10001$$

$$= \left( \frac{10001}{2023 \cdot 10001} - \frac{10001}{2022 \cdot 10001} \right) \cdot 4090506 + \sqrt{4092529} =$$

$$= \left( \frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} \right) \cdot 4090506 + \sqrt{4092529} =$$

$$= \left( \frac{2022 - 2023}{2022 \cdot 2023} \right) \cdot 4090506 + \sqrt{4092529} =$$

$$\frac{4090506}{4044} \Big| \frac{2022}{2023} \Rightarrow 4090506 = 2022 \cdot 2023;$$

$$\begin{array}{r} 4050 \\ \cdot 2023 \\ \hline 4044 \\ 6066 \\ - 6066 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4092529 \\ - 4090506 \\ \hline 2023 \end{array} \Rightarrow 4092529 = 4090506 + 2023 =$$

$$= 2022 \cdot 2023 + 2023 = 2023(2022 + 1) = 2023 \cdot 2023 = 2023^2$$

$$= \frac{-1(2022 - 2023)}{2022 \cdot 2023} + \sqrt{2023^2} = 2023 - 1 = 2022$$

Ответ: 2022. (11)



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

120905

0123456789

# Бланк олимпиадной работы

$$2022 \sqrt{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} \leq 0$$

$$2022 \sqrt{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} \geq 0, \text{ тогда } 2022 \sqrt{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} = 0$$

Обозначим:  $t = x + \frac{1}{x}$

$$t^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$t^3 - 3t - 2t + 4 = 0$$

$$t^3 - 5t + 4 = 0$$

$$t^3 - 5t + 4 = 0$$

$$t^3 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t^2+t-4) = 0$$

$$\begin{cases} t-1=0 \\ t^2+t-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=1 \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Вернемся к  $x$ :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 & (2) \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} & (3) \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \emptyset \\ \emptyset \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4} \end{cases}$$

Ответ:  $\left\{ \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4} \right\}$

$$(2): x + \frac{1}{x} = 1, 1 \cdot x, x \neq 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0, \emptyset$$

$$(3): x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, 2x, x \neq 0$$

$$2x^2 + 2 = -x + \sqrt{17} \cdot x$$

$$2x^2 + x(1 - \sqrt{17}) - 2 = 0$$

$$D = (1 - \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 1 - 2\sqrt{17} + 17 - 16 = 2 - 2\sqrt{17} < 0$$

$$(4): x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, 1 \cdot 2x, x \neq 0$$

$$2x^2 + 2 = -x - \sqrt{17} \cdot x$$

$$2x^2 + x(1 + \sqrt{17}) + 2 = 0$$

$$D = (1 + \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 + 2\sqrt{17} + 17 - 16 = 2 + 2\sqrt{17} > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4}, \text{ Лист 2 из 5}$$



Бланк олимпиадной работы

$$\left(\frac{36 \cdot 23}{20 \cdot 22}\right)^{36+24+16+\dots+36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} > \left(\frac{20 \cdot 23}{20 \cdot 22}\right)^{36}$$

$n = ?$  значение  
 $n$  - шестизначное

$$36 + 24 + 16 + \dots + 36 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} > 36$$

(6n) - ариф. пр;  $b_1 = 36$ ;  $b_2 = 24$ ;  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{3}$ ;  $b_n = b_1 q^{n-1} = 36 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$   
можн  $b_{n+1} = 36 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{n+1} = \frac{b_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \frac{36 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = 36 + 24 + 16 + \dots + 36 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{36 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{-\frac{1}{3}} > 36$$

$$-108 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right) > 36$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1 < -\frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{1}{9}$$

при  $n=1$ :  $\frac{4}{3} > \frac{1}{9}$  не подходит

при  $n=2$ :  $\frac{8}{27} > \frac{1}{9}$

$$\frac{8}{27} > \frac{1}{9} - \text{не подходит}$$

при  $n=3$ :  $\frac{16}{81} > \frac{1}{9}$

$$\frac{16}{81} > \frac{1}{9} - \text{не подходит}$$

при  $n=4$ :  $\frac{32}{243} > \frac{1}{9}$

$$\frac{32}{243} > \frac{1}{9} - \text{не подходит}$$

при  $n=5$ :  $\frac{64}{729} > \frac{1}{9}$

$$\frac{64}{729} < \frac{1}{9} - \text{подходит} \Rightarrow n_{\min} = 5$$

Ответ: 5.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

№ 3.

каждо пред  $\leq 150$

вероятность, что случайная

пред: тяжёлой керти:  $\frac{2}{11}$

: пред лёгкой

шасси:  $\frac{7}{13}$

керти:  $\frac{7}{13}$

n-число пред,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq 150$

$$НОК(11, 13) = 11 \cdot 13 = 143 \Rightarrow n = 143$$

тогда

пред: вероятн, что ш. пред - пред тяж. керти:  $\frac{2}{11} = \frac{26}{143} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  пред тяжёлой керти 26  $\Rightarrow$  пред лёгкой керти:  $143 - 26 = 117$

вероятность, что

керти:  $\frac{7}{13} = \frac{77}{143} \Rightarrow$  пред лёгк. шасси: керти 77

Чтобы шасси:

n-лёгк. шасси: 77

n-тяж. шасси: 0

n-лёгк. высокосерн: ?

n-тяж. высокосерн: ?

узнать, сколько пред высокосерн, т.е.

необходимо

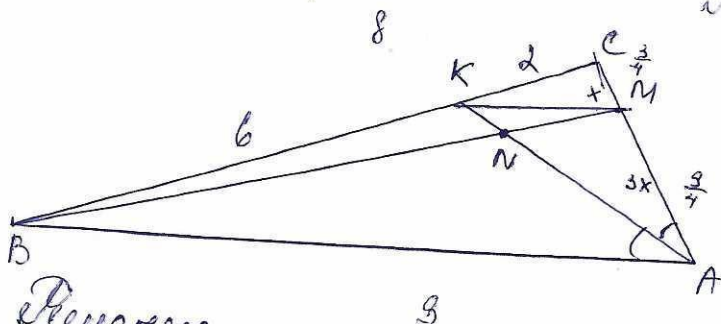
$n_{\text{выс}} =$

$$n_{\text{выс}} = n_{\text{лёгк. выс}} + n_{\text{тяж. выс}} = n - n_{\text{лёгк. шасси}} - n_{\text{тяж. шасси}} =$$

$$= 143 - 77 - 0 = 66$$

Ответ: 66 пред

№ 2.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AB = 8$ ;  $AC = 3$ ;  $BC = 6$ ;  
 $AK - \text{бисс}$ ;  $M \in AC$ ;  $AM : CM = 3 : 1$ ;  
 $AK \cap BM = N$ ;  
 Найти:  $KN$ .

Решение:

1. По Th об отрезках, на которые бисс. делит сторону  $\Delta$ :  $\frac{AC}{KC} = \frac{AB}{KB}$ ;

$$\frac{3}{KC} = \frac{8}{KB}; \quad KB = 3KC; \quad BC = BK + KC = 8; \Rightarrow KB = 6; \quad KC = 2$$

2. по Th, об отр. Th делится жез  $\angle$  и пр. BC и AC;

$$\frac{KN}{KC} = \frac{AM}{MC} \left( \frac{2}{6} = \frac{3}{9} - \text{верно} \right) \Rightarrow AB \parallel KM$$

$$AM : CN = 3 : 1; \quad AC = 3 \Rightarrow CM = 3/4; \quad AM = 9/4$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

3. Это  $\triangle ABC$  кос  $\angle C$ :

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} = \frac{64 + 9 - 81}{2 \cdot 8 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

4. Это  $\triangle KCM$  кос  $\angle C$ :

$$\begin{aligned} KM^2 &= KC^2 + CM^2 - 2 \cdot KC \cdot CM \cdot \cos \angle C = 4 + \frac{9}{16} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \\ &= 4 + \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{9+8}{16} = 4 + \frac{17}{16} = 5\frac{1}{16} = \frac{81}{16} \end{aligned}$$

5. Это  $\triangle KCA$  кос  $\angle C$ :

$$\begin{aligned} KA^2 &= KC^2 + CA^2 - 2 \cdot KC \cdot CA \cdot \cos \angle C = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 15; \\ KA &= \sqrt{15} \end{aligned}$$

6.  $\triangle KNM \sim \triangle ANB$  по двум углам:

$\angle KNM = \angle BNA$ , как вертикальные.

$\angle KMN = \angle NBA$ , так как  $KM \parallel BA$  и секущая  $MB$ .

$$\Rightarrow \frac{KM}{BA} = \frac{KN}{NA}; \quad \frac{\frac{9}{4}}{8} = \frac{KN}{NA} = \frac{1}{4}; \quad 4KN = NA;$$

$$KA = KN + NA = \sqrt{15}; \quad NA = \sqrt{15} - KN$$

$$4KN = \sqrt{15} - KN$$

$$5KN = \sqrt{15}$$

$$KN = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ответ:  $KN = \frac{\sqrt{15}}{5}$  (+)