



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

116104

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	16	2	-					4.8	срок оценки	

Задание 4.

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\dots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}$$

В показателе степени в левой части этого неравенства числа $27; 18; 12; 8; \dots; 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ числа образуют геометрическую прогрессию, где $q = \frac{2}{3}$, число членов $= n$, $b_1 = 27$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{27 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{27 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{3}} =$$

$$= -81 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \cdot +$$

Число $\frac{2023}{2022} > 1 \Rightarrow$ поэтому S_n величина
быть больше, чем 72,

чтобы $\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+12+8+\dots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}$ было
верно.

Бланк олимпиадной работы

$-81 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \geq 72$ (решив это неравенство, мы найдём ответ)

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) < -\frac{72}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 < -\frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 - \frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{9}$$

$$\frac{8}{27} > \frac{3}{27}$$

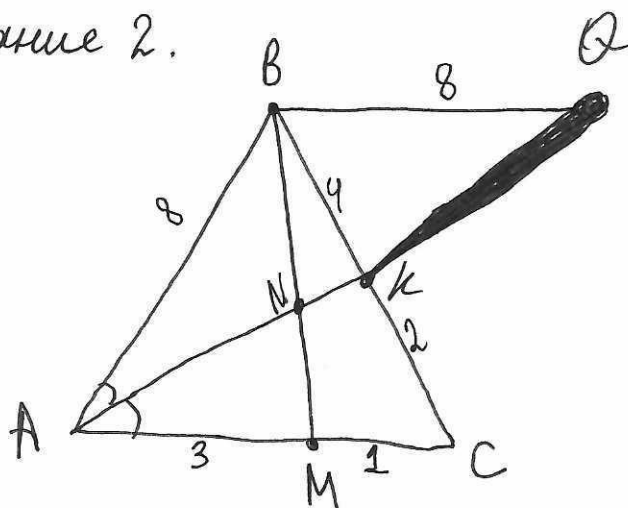
$$\frac{1}{9} = \frac{2}{18}, \text{ а } 3^2 < 18 < 3^3$$

$\Rightarrow$ Для того, чтобы неравенство было верно, нужно, чтобы n было ≥ 3 .

$\Rightarrow$ Минимальное натуральное решение = 3.

Ответ: 3.

Задача 2.



Решение:
 Продлим AK
 до такой точки
 Q, что $BQ \parallel AC$
 (BQ параллельно
 AC)



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{AM}{MC} = \frac{3}{1} \text{ (из условия)}$$

$$AC = 4.$$

$$\Rightarrow AM = 3; MC = 1$$

По свойству биссектрисы:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Delta BQK \sim \Delta AKC \text{ (т.к. } \angle QBK = \angle KCA \text{ и } \angle BQK = \angle KAC \text{ т.к. } BQ \parallel AC)$$

$$\Rightarrow \frac{BQ}{AC} = \frac{BK}{KC} = 2$$

$$\Rightarrow BQ = 2AC = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{QK}{AK} = 2 \Rightarrow QK = 2AK$$

$$\frac{BK}{KC} = 2 \text{ и } BC = 6 \Rightarrow BK = 4 \text{ и } KC = 2$$

$$\Delta ANM \sim \Delta BNQ \text{ (по 2 углам (накрест лежащие углы при // прямых равны) } \angle QBN = \angle NMA \text{ и } \angle BQN = \angle NAM)$$

$$\Rightarrow \frac{QN}{AN} = \frac{BQ}{AM} = \frac{8}{3} \Rightarrow QN = \frac{8}{3} AN.$$

$$QK = 2AK \text{ и при этом } QN = \frac{8}{3} AN.$$

$$AK = AN + NK$$

$$QN = QK + NK$$

$$\Rightarrow QK = 2AK = 2(AN + NK) = 2AN + 2NK$$

Бланк олимпиадной работы

$$QN = \frac{8}{3} AN \Rightarrow QK + NK = \frac{8}{3} AN \Rightarrow QK = \frac{8}{3} AN - NK$$

$$\begin{cases} QK = 2AN + 2NK \\ QK = \frac{8}{3} AN - NK \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2AN + 2NK = \frac{8}{3} AN - NK$$

$$2AN - \frac{8}{3} AN = -NK - 2NK$$

$$\frac{6}{3} AN - \frac{8}{3} AN = -3NK$$

$$-\frac{2}{3} AN = -3NK$$

$$\frac{2}{3} AN = 3NK$$

$$2AN = 9NK$$

$$\frac{AN}{NK} = \frac{9}{2} \Rightarrow AN = \frac{9}{2} NK \quad NK = \frac{2}{9} AN$$

$$AK = AN + NK = \frac{9}{2} NK + NK = \frac{11}{2} NK$$

$$AK = AN + NK = AN + \frac{2}{9} AN = \frac{11}{9} AN \Rightarrow AN = \frac{AK}{\frac{11}{9}} = \frac{9}{11} AK$$

Существует формула, что квадрат биссектрисы равен разности произведения 2 прилежащих сторон и произведению отрезков, на которые биссектриса разбивает противоположную сторону.

$$\Rightarrow AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot KC = 8 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = 32 - 8 = 24$$

$$\Rightarrow AK = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$AN = \frac{9}{11} AK = \frac{9}{11} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{18}{11} \sqrt{6}$$

Бланк олимпиадной работы

Задача 5.

$$2022 \sqrt{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3} \leq 0.$$

ООФ: $x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 \geq 0.$

В то же время, решение неравенства имеет место только в случае,

если $x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 \leq 0$ (при $x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 \geq 0$
 $2022 \sqrt{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3}$ тоже
 будет ≥ 0)

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 \geq 0 \\ x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 \leq 0 \end{cases}$
 описывает систему

решением ^{этой} системы ~~этого~~ будет решение уравнения

$$x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 = 0. \quad (+)$$

$$\frac{x^6}{x^3} - \frac{x^4}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{3x^3}{x^3} = 0$$

$$\frac{x^6 - x^4 - x^2 + 1 + 3x^3}{x^3} = 0$$

при $x \neq 0$!

$$x^6 - x^4 - x^2 + 1 + 3x^3 = 0$$

$$x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 = 0$$

Бланк олимпиадной работы

Решим уравнение $x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 = 0$ методом понижения степеней.

Один из корней уравнения является делителем свободного члена (в данном случае, свободный член равен 1, его делители: 1 и -1).

при $x = 1$: $1^6 - 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 1^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ не является корнем этого уравнения

при $x = -1$: $(-1)^6 - (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ не является корнем этого уравнения.

Большие делители свободного члена нет.
 $\Rightarrow$ Это уравнение не имеет корней.
 $\Rightarrow$ решением исходного неравенства является пустое множество $(\emptyset)$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Задача 1.

$$\left(\frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 2023 + \frac{1}{\sqrt{4088484}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} = \frac{10001 \cdot 20222022 - 10001 \cdot 20232023}{20232023 \cdot 20222022} = \\ & = \frac{10001 \cdot (20222022 - 20232023)}{20232023 \cdot 20222022} = \frac{10001 \cdot (-10001)}{20232023 \cdot 20222022} \end{aligned}$$

Бланк олимпиадной работы

$$= \frac{-10001^2}{10001 \cdot 2023 \cdot 10001 \cdot 2022} = \frac{-10001^2}{10001^2 \cdot 2023 \cdot 2022} = \frac{-1}{2023 \cdot 2022}$$

$$② \quad \frac{-1}{2023 \cdot 2022} \cdot \cancel{2023} = \frac{-1}{2022}$$

$$③ \quad \frac{-1}{2022} + \frac{1}{\sqrt{4088484}} = \frac{-1}{2022} + \frac{1}{2022} = 0$$

Ответ: 0.

Задание 3.

Т.к. среди проб темной нефти не оказалось малосернистой $\Rightarrow$ ~~всех проб~~
среди всех проб темной нефти существуют только высокосернистые.

(вероятность, что случайно выбранная проба окажется в темной равна $\frac{1}{8}$ (по условию)) $\Rightarrow$ ~~каждой~~ кол-во проб темной высокосернистой нефти составляет $\frac{1}{8}$ от кол-ва всех проб.

Отн. частота, что случайно выбранная проба окажется нек. малосерн. равна $\frac{22}{37}$ ¹²⁵
Лист 7 из 8

Бланк олимпиадной работы

Полная вероятность событий равна 1
 $\Rightarrow$ вероятность того, что случайно выбранная проба окажется лёгкой высокосернистой
 равна $1 - \frac{1}{8} - \frac{22}{37} = \frac{296}{296} - \frac{37}{296} - \frac{83}{296} = \frac{296 - 37 - 83}{296} = \frac{176}{296} = \frac{88}{148} = \frac{44}{74} = \frac{22}{37}$

$\Rightarrow$ вероятность того, что случайно выбранная проба - высокосернистая $= \frac{1}{8} + \frac{83}{296} = \frac{37}{296} + \frac{83}{296} = \frac{120}{296}$

Число всех проб должно делиться на знаменатель дроби (р. высокосернистой пробы) (296)
 т.к. число проб не может быть целым.
 $\Rightarrow$ всего было 296 проб.

всего проб с высокосернистой пробы будет 120
 $\Rightarrow$ того, что случайно выбранная проба окажется высокосернистой равна $\frac{120}{296}$

Ответ: 120