



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

110625

0123456789



$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	2	20	20	2					59	пятьдесят девять	

Задание №1

$$\left(\frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 2023 + \frac{1}{54088484} =$$

$$= \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} \right) \cdot 2023 + \frac{1}{\sqrt{2022^2}} = 1 - 1 - \frac{1}{2022} + \frac{1}{120221} = 0$$

Ответ: 0

Задание №4

$$\left(\frac{2023}{2022} \right)^{27+18+12+8+\dots+27\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022} \right)^{72}$$

Найти наименьшее натуральное решение

$$\frac{2023}{2022} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2023}{2022}\right) > 0 \Rightarrow 27+18+12+8+\dots+27\left(\frac{2}{3}\right)^n > 72$$

$$27\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 72$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{72}{27}$$

$$\frac{65}{27} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{72}{27}$$

Пусть $n = 4$, тогда $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 > \frac{7}{27}$

$$\frac{16}{81} > \frac{7}{27}$$

$$\frac{16}{81} > \frac{21}{81} \text{ — ложно}$$

Тогда $n \neq 4$

Бланк олимпиадной работы

Тогда пусть $n=5$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 > \frac{7}{27}$$

$$\frac{16}{81} + \frac{32}{243} > \frac{7}{27}$$

$$\frac{80}{243} > \frac{63}{243} \text{ — истина}$$

Значит, $n=5$ является ^{натуральным} решением кр-ва и оно минимальное

Ответ: $n=5$



Задание №2

Дано: $\triangle ABC$

$$AB=8$$

$$AC=4$$

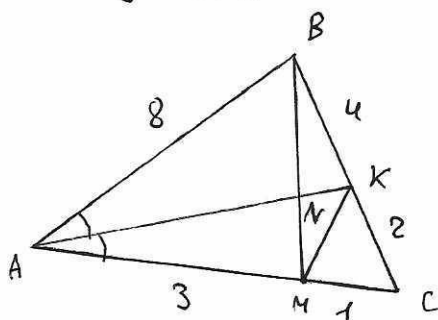
$$BC=6$$

AK — биссектриса

$$M \in AC \quad \frac{AM}{CM} = \frac{3}{1}$$

$N \in AK$; $N \in BM$

Найти: AN



Решение

- 1) т.к. $AC=4$; $AM=3$ см, то $AM=3$; $CM=1$
- 2) из св-ва биссектрисы $\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{CK}$; $AB=8$; $AC=4$; $BC=6$, то $BK=4$; $CK=2$
- 3) Воспользуемся методом площадей

$$S_{ABM} = \frac{3}{4} \cdot S_{ABC}$$

$$S_{KMC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} S_{ABC} = \frac{1}{12} S_{ABC}$$

$$S_{BMK} = S_{ABC} - S_{ABM} - S_{KMC} = S_{ABC} - \frac{3}{4} S_{ABC} - \frac{1}{12} S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{ABC}$$

$$\frac{AN}{NK} = \frac{S_{ABM}}{S_{BMK}} = \frac{\frac{3}{4} S_{ABC}}{\frac{1}{6} S_{ABC}} = \frac{9}{2}$$

$$4) \text{ Из теоремы Стюарта } AK = \sqrt{8 \cdot 4 - 2 \cdot 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$5) \text{ т.к. } \frac{AN}{NK} = \frac{9}{2} \text{ (по п. 3) и } AK = 2\sqrt{6} \text{ (по п. 4)}$$

$$\downarrow$$

$$NK = \frac{2}{9} AN$$

$$AK = \frac{11}{9} AN \Rightarrow AN = \frac{9}{11} AK$$

$$AN = \frac{18\sqrt{6}}{11} \text{ Ответ: } AN = \frac{18\sqrt{6}}{11}$$



Бланк олимпиадной работы

Задание №5

2022 $\sqrt{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3 + 3}} \leq 0$

Т.к. 2022: 2, то $\sqrt{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3 + 3}} \geq 0$, значит $\sqrt{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3 + 3}} \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3 + 3} = 0$

$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - 3x^2 \cdot \frac{1}{x} - 3x \cdot \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x} + 3 = 0$ +

$(x + \frac{1}{x})^3 - 4(x + \frac{1}{x}) + 3 = 0$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$, значит $\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$

$t^3 - 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t^2+t-3) = 0$ +

$\begin{cases} t=1, \\ t^2+t-3=0 \end{cases}$

$t^2+t-3=0$

$D = 1+4 \cdot 3$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ +

$\begin{cases} t=1, \\ t = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq 2, \\ t \leq -2 \end{cases}$

$t = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

$x = \frac{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\frac{14 + 2\sqrt{13}}{4} - 4}}{2}$

$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{13}}{8}}$

Ответ: $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} - \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{13}}{8}}$; $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{13}}{8}}$ (4)

Задание №3

Т.к. среди тяжелой нефти нет на осернистой $\Rightarrow$ вся она высоко сернистая $\Rightarrow \frac{1}{8}$ проб высоко сернистая
Вся остальная нефть легкая и лишь $\frac{15}{37}$ легкой нефти высоко сернистая

$\frac{1}{8}x + \frac{15}{37}(1 - \frac{1}{8})x = (\frac{1}{8} + \frac{7 \cdot 15}{37 \cdot 8})x = (1 + \frac{105}{37}) \cdot \frac{x}{8} = \frac{142x}{37 \cdot 8} = \frac{71x}{37 \cdot 4} = \frac{71x}{148} = \frac{142x}{296}$

Значит, т.к. $x \approx 300$, то высоко сернистой нефти всего 142 пробы

Ответ: 142 пробы



$E = mc^2$



Бланк олимпиадной работы

Задача №6

$S_{\text{покр}} = 7\pi \cdot 41^2$

$S_k = \pi R^2 - \pi(R-18)^2 = \pi(18(2R-18)) = 36\pi(R-9)$

$S_k \leq S_{\text{покр}}$

$36\pi(R-9) \leq 7\pi \cdot 41^2$

$R \leq \frac{7 \cdot 41^2}{36} + 9$

$R \leq 335 \frac{31}{36}$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 1681 \\ 7 \\ \hline 11767 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12091 \overline{) 36} \\ - 108 \\ \hline 129 \\ - 108 \\ \hline 211 \\ - 180 \\ \hline 31 \end{array}$$

2