



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 2 2 9 4 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МТМЧ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

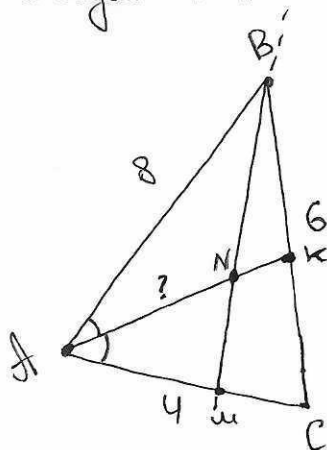
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	0	20	20	0					55	сорок пять	<i>М</i>

Задание 1.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 2023 + \frac{1}{\sqrt{4088484}} = \left(\frac{10001}{2023 \cdot 10001} - \frac{10001}{2022 \cdot 10001} \right) \cdot 2023 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{4088484}} = \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} \right) \cdot 2023 + \frac{1}{\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2}} = \\ & = \frac{(2022 - 2023) \cdot 2023}{2023 \cdot 2022} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 337} = \\ & = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 337} - \frac{1}{2022} = \frac{1}{2022} - \frac{1}{2022} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0

Задание 2.



Дано:

$\triangle ABC$.

$AB = 8$

$BC = 6$

$AC = 4$

AK - биссектриса

$AM:MC = 3:1$

Найти:

AN - ?

$$\begin{array}{r} 4088484 \mid 2 \\ 2044242 \mid 2 \\ 1022121 \mid 3 \\ 340707 \mid 3 \\ 113569 \mid 337 \\ 337 \mid 337 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 337 \\ \times 3 \\ \hline 1011 \end{array}$$

Бланк олимпиадной работы

Задание 2 (продолжение)

Решение:

- 1) По свойству биссектрисы: биссектриса в $\triangle ABC$ делит противоположную сторону на пропорциональные стороны отрезки. (*1)

$$\begin{cases} \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = 2 \\ BK + KC = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BK = 4 \\ KC = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AM:MC = 3:1 \\ AM + MC = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM = 3 \\ MC = 1 \end{cases}$$

- 3) Рассмотрим $\triangle AKC$ и прямую BM .

По теореме Менелая:

$$\frac{CM}{AM} \cdot \frac{AN}{NK} \cdot \frac{BK}{KC} = 1, \text{ подставив все значения, получим:}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{AN}{NK} \cdot \frac{4}{2} = 1$$

$$\frac{AN}{NK} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

- 4) Длина биссектрисы l_a в треугольнике ABC равна

$$l_a = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot KC} = \sqrt{8 \cdot 4 - 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 4} = 2\sqrt{6}$$

- 5) Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{AN}{NK} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \underline{NK} = \frac{2}{9} AN \\ \underline{AN} + \underline{NK} = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\frac{2}{9} NA + NA = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{11}{9} AN = 2\sqrt{6}$$

$$AN = \frac{9}{11} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{18}{11} \sqrt{6} = 1\frac{7}{11} \sqrt{6}$$

Ответ: $1\frac{7}{11} \sqrt{6}$

10



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 3.

Пусть событие $a \Rightarrow$ достать легкую нефть

$b \Rightarrow$ тяжелую

$c \Rightarrow$ мало сернистую

$d \Rightarrow$ ~~мало~~ высокосернистую

По условию:

$$\begin{cases} p(b) = \frac{1}{8} \\ (1 - p(b)) \cdot p(c) = \frac{22}{37} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(a) + p(b) &= 1 \\ p(c) + p(d) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(a) &= 1 - p(b) = \frac{7}{8}, \text{ тогда } p(c) = \frac{22}{37} : p(a) = \frac{22}{37} \cdot \frac{8}{7} = \frac{22 \cdot 8}{37 \cdot 7} = \frac{176}{259} \\ p(d) &= 1 - p(c) = 1 - \frac{22 \cdot 8}{37 \cdot 7} = \frac{37 \cdot 7 - 22 \cdot 8}{37 \cdot 7} = \frac{83}{259} \end{aligned}$$

$a \text{ } c$; $a \text{ } d$; $b \text{ } d \Rightarrow$ нефть может обладать одним из этих признаков. (Напоминает чем-то генетику в биологии)

Вероятность вытащить $(b \text{ } d) = \frac{1}{8}$, т.к. $p(b) = \frac{1}{8}$, а (b) содержится только в $b \text{ } d$

Вероятность вытащить $(a \text{ } c) = \frac{22}{37}$ (по условию)

$$p(a \text{ } c) + p(a \text{ } d) = 1 - p(b \text{ } d) = \frac{7}{8}$$

$$\begin{cases} p(a \text{ } c) + p(a \text{ } d) = \frac{7}{8} \\ p(a \text{ } c) = \frac{22}{37} \end{cases} \Rightarrow p(a \text{ } d) = \frac{7}{8} - \frac{22}{37} = \frac{171}{148 \cdot 2} = \frac{171}{296}$$

$$p(* \text{ } d) = p(a \text{ } d) + p(b \text{ } c) = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{22}{37} = \frac{7}{4} + \frac{22}{37} = \frac{7 \cdot 37 + 88}{4 \cdot 37} = \frac{291 + 88}{148} = \frac{379}{148}$$

$$p(a \text{ } d) = p(a) \cdot p(d) = \frac{7}{8} \cdot p(d) = \frac{171}{296}$$

$$p(d) = \frac{171}{296} \cdot \frac{8}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда количество высокосернистой нефти} &\approx \frac{171 \cdot 8}{7} = \\ &= \frac{800 + 80 \cdot 7 + 8}{7} = 700 + 80 + 1 + \frac{100 + 1}{7} = 181 + 10 + \frac{31}{7} = 191 + 4 + \frac{3}{7} = \\ &= 195 \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Ответ: 195 проб высокосернистой нефти.

Бланк олимпиадной работы

Задание 4

$$\left(\frac{2023}{2022}\right)^{27+18+\dots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{72}$$

$27; 18; \dots; 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow$ геометрическая прогрессия

$$b_1 = 27$$

$$b_2 = 18$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_{n+1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ значит } \underbrace{27+18+\dots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{(n+1) \text{ слагаемых}}$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 27 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 81 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

т.к. $\frac{2023}{2022} > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, то

$$27+18+\dots+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n > 72$$

$$81 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) > 72$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > \frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$2^{n+1} \cdot 3^2 < 3^{n+1}$$

$$2^{n+1} < 3^{n-1}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^n < 3^n$$

$$6 < (1,5)^n$$

$$1,5^n > 6$$

	$\frac{2,25}{1,5}$	$\frac{3,375}{2,25}$	$\frac{5,0625}{3,375}$	$\frac{7,59375}{5,0625}$
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
①	②	③	④	⑤

Ответ: 5

Бланк олимпиадной работы

Задача 5.

$$\sqrt[2022]{x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3} \leq 0$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$$

Пусть $x^3 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 3 = a$

$$\sqrt[2022]{a} \leq 0$$

Из определения корня (2n) степени следует, что

$\sqrt[2n]{a} = b \Leftrightarrow b^{2n} = a$, где $a \geq 0$; $b \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$, откуда получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt[2022]{a} \leq 0 & (*1) \\ \sqrt[2022]{a} \geq 0 & (*2) \\ a \geq 0 \end{cases}$$

Из ^{неравенств} выражений (*1) и (*2) следует

$$0 \leq \sqrt[2022]{a} \leq 0 \rightarrow \text{это возможно только при } \sqrt[2022]{a} = 0$$

Поэтому решим уравнение

$$x^3 - (x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} + 3 = 0$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $t^3 = x^3 + 3(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3t$
 $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$

$$t^3 - 3t - t + 3 = 0$$

$$t^3 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1$$

По теореме Безу $\Rightarrow (t^3 - 4t + 3)$ делится на $(t - t_1)$

$$t^2 + t - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 + 12 = 13$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Сделаем обратную замену

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 & (*1) \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} & (*2) \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} & (*3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 & (*1)' \\ x^2 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0 & (*2)' \\ x^2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}x + 1 = 0 & (*3)' \end{cases}$$

(*1)' не имеет корней ($\Delta < 0$)

$$(*2)' \Delta = \frac{1 + 2\sqrt{13} + 13}{4} - 4 = \frac{10 + 2\sqrt{13}}{4} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} = \frac{2\sqrt{13} - 2}{4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 1}{2}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 1}{2}}$$

$$(*3)' \Delta = \frac{1 - 2\sqrt{13} + 13}{4} - 4 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{4} < 0 \text{ - не имеет корней}$$

Ответ: $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 1}{2}}$ + (20)

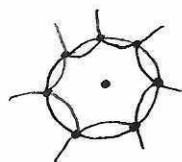
Бланк олимпиадной работы

Задание 6.

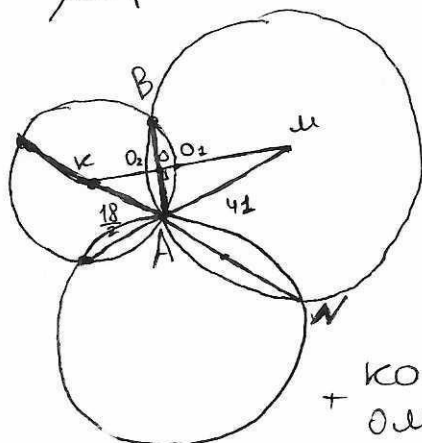


Представим, что все радары расположены на одном и том же расстоянии от центра платформы.

П.к. они покрывают кольцо (18 км) представим, что радары образуют правильный семиугольник



Они делят длину кольца (18 км) на одинаковые участки, т.е. $\frac{2\pi \cdot 18}{7 \cdot 2} = \frac{36}{7}\pi$



$$\begin{aligned}
 KM &= KO + OM = \sqrt{KA^2 - OA^2} + \sqrt{MA^2 - OA^2} = \\
 &= \sqrt{18^2 - \left(\frac{36\pi}{7}\right)^2} + \sqrt{41^2 - \left(\frac{36\pi}{7}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{18^2 - \left(\frac{18}{7}\pi\right)^2} + \sqrt{41^2 - \left(\frac{18}{7}\pi\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\angle OKA = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{7} = \frac{180}{7}$$

$$\begin{aligned}
 KO &= 18 \cdot \sin \frac{180}{7} = 9 \sin \frac{180}{7} \\
 OM &= \sqrt{41^2 - \left(18 \cdot \cos \frac{180}{7}\right)^2} = \sqrt{1681 - 81 \cos^2 \frac{180}{7}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 KM &= \frac{18}{2} \sin \frac{180}{7} + \sqrt{41^2 - 18^2 \cos^2 \frac{180}{7}} = \\
 &= \frac{18}{2} \sin \left(\frac{180}{7}\right) + \sqrt{1681 - \frac{324}{4} \cos^2 \frac{180}{7}} = \sqrt{1357 + \frac{324}{4} \sin^2 \frac{180}{7}}
 \end{aligned}$$

Максимальное расстояние равно $18 \cdot \sin \frac{180}{7} +$

$$+ \sqrt{1681 - \frac{324}{4} \cos^2 \frac{180}{7}} = \frac{18}{2} \sin \frac{180}{7} + \sqrt{1357 + \frac{324}{4} \sin^2 \frac{180}{7}}$$

$$S_{\text{к.п.}} = 7\pi \cdot 41^2 - 7 \cdot S_{\text{платформы}} = S_{\text{к.п.}} = 7\pi \cdot 41^2 - 7 \cdot S_{\text{платформы}} - ?$$

$$\sqrt{1681 - 81 \cos^2 \left(\frac{180}{7}\right)} + 9 \sin \left(\frac{180}{7}\right)$$

$$\text{Ответ: } \frac{18}{2} \sin \left(\frac{180}{7}\right) + \sqrt{1357 + \frac{324}{4} \sin^2 \left(\frac{180}{7}\right)} = 9 \sin \left(\frac{180}{7}\right) + \sqrt{1357 + 81 \sin^2 \left(\frac{180}{7}\right)}$$