

ШИФР



Бланк олимпиадной работы

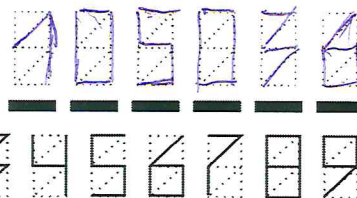
Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания ТПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	3,5	7	15	12	12	—	—	—	—	—	49,5	сорок девять, пять десятых	Иванов



Бланк олимпиадной работы

№1
$$\frac{a^{12} + 72a^2}{72a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 \cdot a^6}$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 4$$

$$\frac{a}{3} = t$$

$$t - \frac{1}{t} = 4$$

$$a = 3t$$

$$\frac{3^{12} \cdot t^{12} + 3^{12}}{72 \cdot 3^{12} \cdot t^6} = \frac{t^{12} + 1}{t^6} = t^6 + \frac{1}{t^6} = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) \left(t^4 + 1 + \frac{1}{t^4}\right) \quad \checkmark$$

$$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = 16$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = 18$$

$$\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 = t^4 + 2 + \frac{1}{t^4} = 324$$

$$t^4 + 1 + \frac{1}{t^4} = 324 - 1 = 323$$

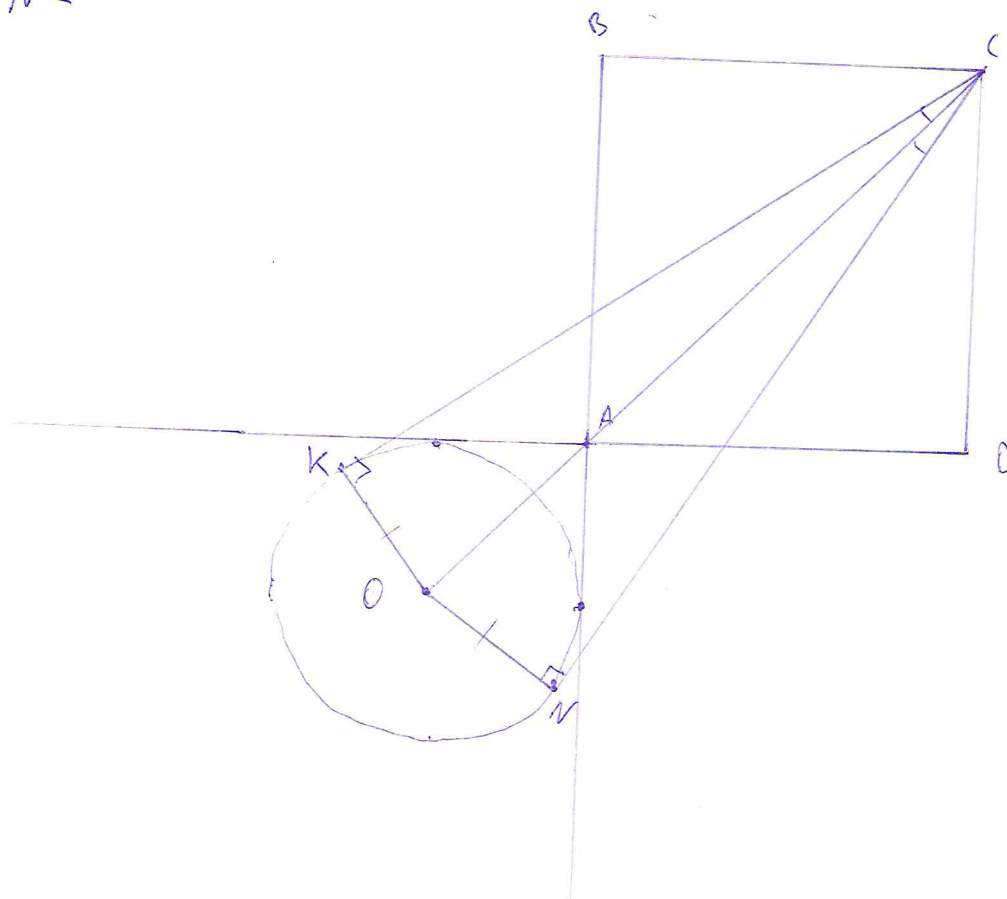
$$\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) \left(t^4 + 1 + \frac{1}{t^4}\right) = 18 \cdot 323 = 5814 \quad \checkmark$$

Ответ: 5814

3,5

Бланк олимпиадной работы

N2



Пусть R — радиус окруж. O

$$AB = BC = CD = DA = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{2} \cdot (6 + 2\sqrt{5})$$

$$AO = \sqrt{2} \cdot R$$

$$OC = OA + AC = \sqrt{2} \cdot R + \sqrt{2} \cdot (6 + 2\sqrt{5})$$

Т.к. $OK = ON$, CO — биссектриса $\angle KCN \Rightarrow \angle OCN = \angle KCN = 18^\circ$

$$\sin 18^\circ = \frac{ON}{OC} = \frac{R}{\sqrt{2} \cdot R + \sqrt{2} \cdot (6 + 2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

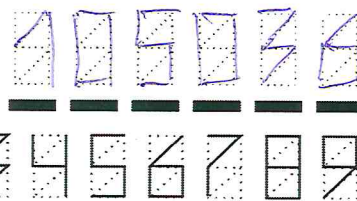
$$4R = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{2} \cdot (R + 6 + 2\sqrt{5}))$$

$$CO = \frac{4R}{\sqrt{5}-1} = \frac{4R(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5} \cdot R + R = \sqrt{2}R + \sqrt{2} \cdot 6 + 2\sqrt{10}$$

$$R(\sqrt{5}+1-\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

$$R = \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+1-\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+1-\sqrt{2}} \text{ см}$$



Бланк олимпиадной работы

№3

$$\begin{cases} x^2 - 23y - 25z = -681 \\ y^2 - 21x - 21z = -719 \\ z^2 - 19x - 21y = -313 \end{cases}$$

Если сложить все равенства, получится

$$x^2 - 70x + y^2 - 44y + z^2 - 46z = -700 - 484 - 529$$

$$x^2 - 70x + 700 + y^2 - 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

Каждое слагаемое неотрицательное $\Rightarrow 0$ достигается тогда, когда
все они $= 0$

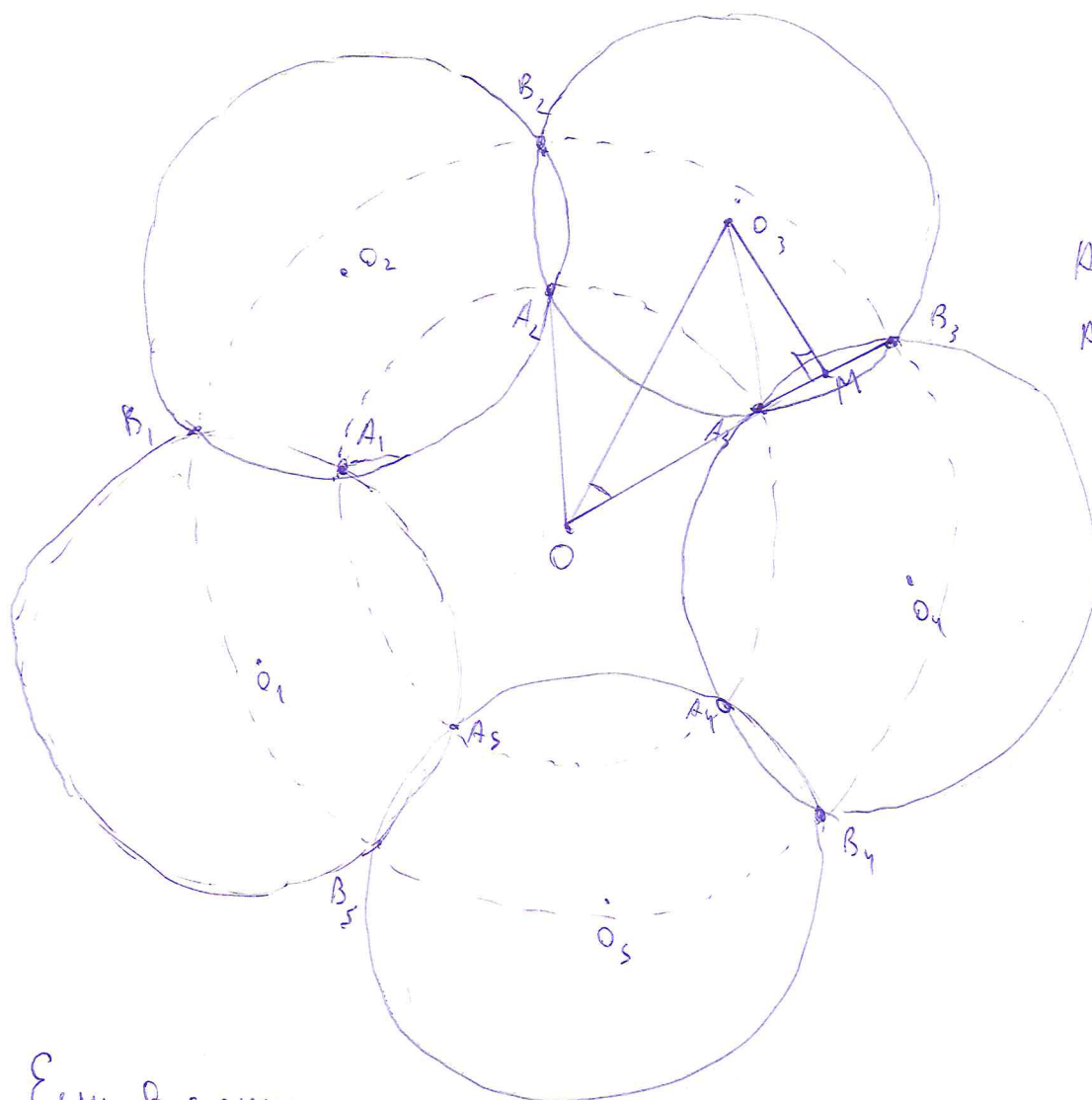
$$\Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=22 \\ z=23 \end{cases}$$

Ответ: $(20; 22; 23)$

15

Бланк олимпиадной работы

4.

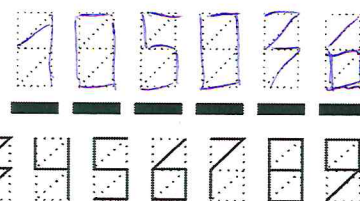


$$R_3 B_3 = 14 \text{ км}$$

$$R_2 O_3 = 25 \text{ км}$$

Если в данном расположении передвинуть один из радиусов, то
 нельзя будет покрыто не полностью либо с наложением. Тогда все
 конструкции симметричны и представляет $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ — правильный 5-ти
 угольник. Тогда угол $\angle A_2 O A_3 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Из симметрии, OO_3 — биссектриса $\angle A_2 O A_3$,
 и $\angle O_3 O A_3 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$



Бланк олимпиадной работы

Пусть M - середина A_3B_3 . Тогда $MO_3 \perp A_3B_3$ (сер. пер. к хорде проходит ч-з центр окружности)

$$\tan 18^\circ = \frac{(55-1)52}{55+52} \cdot 2 = \frac{O_3M}{OM} = \frac{27}{OM} ?$$

$$AM = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ см}$$

$$O_3M = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

$$OM = \frac{27}{\tan 18^\circ}$$

$$OA_3 = OM - 7 = \frac{27}{\tan 18^\circ} - 7$$

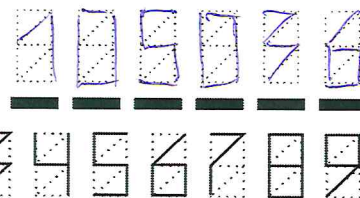
$$OB_3 = OA_3 + 14 = \frac{27}{\tan 18^\circ} + 7$$

$$OO_3 = \sqrt{27^2 + \frac{27^2}{\tan^2 18^\circ}} = 27 \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 18^\circ}} = 27 \frac{\sqrt{\tan^2 18^\circ + 1}}{\tan 18^\circ} \text{ см}$$

$$S_{\text{кольца}} = \pi \cdot OB_3^2 - \pi \cdot OA_3^2 = \pi (OB_3 + OA_3)(OB_3 - OA_3) =$$

$$= \pi \left(\frac{48}{\tan 18^\circ} \right) (14) \text{ см}^2$$

Ответ: $27 \cdot \frac{\sqrt{\tan^2 18^\circ + 1}}{\tan 18^\circ} \text{ см}$ $\pi \left(\frac{48}{\tan 18^\circ} \right) (14) \text{ см}^2$



Бланк олимпиадной работы

$N 5$

$(k^2 - 2k - 29)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$; $k \in [6; 11]$
 $k \neq 6$, т.к. $0 \cdot x^2 + 10x + 2 = 0$ имеет 1 корень
 не уч. $k = 2$

при $k > 6$, $k^2 - 2k - 29 > 0 \Rightarrow x_1 > x_2$

$D = (k - 16)^2 = (16 - k)^2$, $|16 - k| = 16 - k$
 при $k \in [6; 11]$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8 - 3k + 16 - k}{2(k - 6)(k + 4)} = \frac{12 - 2k}{(k - 6)(k + 4)} = \frac{-2(k - 6)}{(k - 6)(k + 4)} = \frac{-2}{k + 4} \\ x_2 = \frac{8 - 3k - 16 + k}{2(k - 6)(k + 4)} = \frac{-(1 + k)}{(k - 6)(k + 4)} = -\frac{1}{k - 6} \end{cases}$$

$2x_2 \geq x_1$

$-2 \cdot \frac{1}{k - 6} \geq -2 \cdot \frac{1}{k + 4}$

$\frac{1}{k - 6} \leq \frac{1}{k + 4}$

$\frac{1}{k + 4} - \frac{1}{k - 6} \geq 0$

$\frac{k - 6 - k - 4}{(k + 4)(k - 6)} \geq 0$

$\frac{-10}{(k + 4)(k - 6)} \geq 0$

$\frac{1}{(k + 4)(k - 6)} \leq 0$

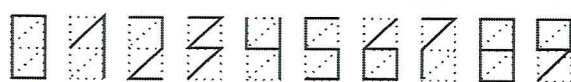
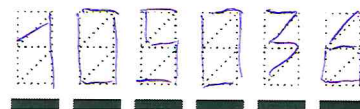
$k \in (-4; 6)$

или второй случай.

$-2 \cdot \frac{1}{k + 4} \geq -\frac{1}{k - 6}$

125





Бланк олимпиадной работы

Множество $(-7; 6)$ и $[6; 11]$ не имеет общих точек $\Rightarrow$
 при всех $k \in [6; 11]$, $x_1 > 2x_2$

$\Rightarrow$ верность = 0

Ответ: 0.

