

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания ТПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	—	20	14	—	—	—	—	64	шестьдесят четыре	Шарогрин

Задача 1:

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = ? , \text{ если } \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 4$$

$$\frac{a}{3} = t \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 4$$

$$\frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left\{ 729 = 3^6 \right\} = \left(\frac{a}{3} \right)^6 + \left(\frac{3}{a} \right)^6 =$$

$$= t^6 + \frac{1}{t^6} = \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) \left(t^4 - 1 + \frac{1}{t^4} \right) = \{ \text{из уок ① и ②} \} = 18 \cdot (322 - 1) =$$

$$t - \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = 16 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 18$$

$$\textcircled{1} t^2 + \frac{1}{t^2} = 18$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = 18$$

$$t^4 + 2 + \frac{1}{t^4} = 324$$

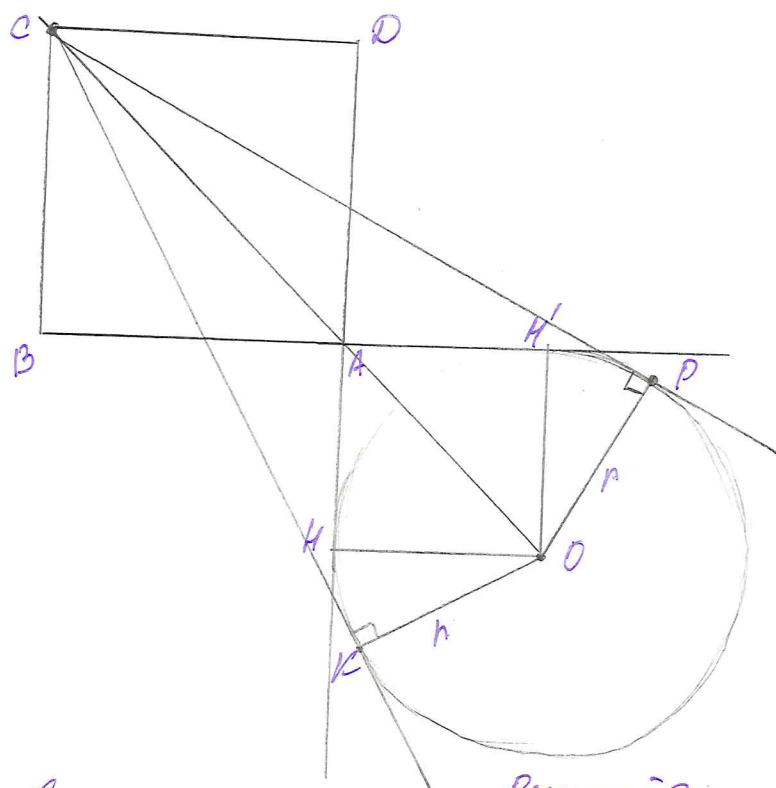
$$\textcircled{2} t^4 + \frac{1}{t^4} = 322$$

Ответ: 5778

5

Бланк олимпиадной работы

Задача 2.



Дано: $ABCD$ - квадрат.
 $ОК(О; r)$; $AB = 6 + 2\sqrt{5}$
 $СК$; $СР$ - кас. к $оур.$
 $\angle KCP = 36^\circ$; $\sin H^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
 Найти: r - ?

10

Решение:
 Проведи $ОН$ и $ОН'$ $\perp$ -но прог-ли $КМ$ и DA .
 Проведи $СО$, $СО$ - биссектриса угла KCP и $\angle HAN' \Rightarrow$ и биссектриса
 $\angle BCD \Rightarrow CO \perp HA$.
 Проведи $ОК$ и $ОР$; $ОК \perp СК$; $ОР \perp СР$
 $ОК = ОР = r$; $CA = (6 + 2\sqrt{5})\sqrt{2}$ - диаг кв.
 $АН'ОН'$ - квадрат, т.к. $ОН \parallel HA$; $ОН' \parallel HA$; $ОН = ОН'$; $\angle AHO = \angle ONH = 90^\circ$
 $\Rightarrow AO = r\sqrt{2}$. $\Rightarrow CO = CA + AO = (6 + 2\sqrt{5})\sqrt{2} + r\sqrt{2} = (6 + 2\sqrt{5} + r)\sqrt{2}$
 $\angle KCO = H^\circ$; $\sin H^\circ = \frac{r}{CO} = \frac{r}{(6 + 2\sqrt{5} + r)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
 $2\sqrt{2}r = 6\sqrt{5} + 10 + r\sqrt{5} - 6 - 2\sqrt{5} - r$
 $2\sqrt{2}r - r\sqrt{5} + r = 6\sqrt{5} + 4$
 $r = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$ Отв: $r = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$

Бланк олимпиадной работы

Задача 3:

$$\begin{cases} x^2 - 23y - 25z = -681 \\ y^2 - 21x - 21z = -419 \\ z^2 - 19x - 11y = -313 \end{cases}$$

проиницируем все уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 23y - 25z - 21x - 21z - 19x - 11y = -681 - 419 - 313.$$

$$x^2 - 40x + y^2 - 11y + z^2 - 46z = -1413.$$

$$20^2 = 400$$

$$22^2 = 484$$

$$23^2 = 529$$

$$\Rightarrow 20^2 + 22^2 + 23^2 = 400 + 484 + 529 = 884 + 529 = 1413$$

$$(x^2 - 40x + 20^2) + (y^2 - 11y + 22^2) + (z^2 - 46z + 23^2) = 0$$

$$(x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=22 \\ z=23 \end{cases}$$

15

ОТВ. ~~$x=20; y=22$~~ ОТВ. $x=20 (20; 22; 23)$

Бланк олимпиадной работы

Задача 8:

$k \in [0; 11]$; $(k^2 - 2k - 24)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$ $x_1 \leq 2x_2$

A - корни удовлетворяют условию;

$$(k^2 - 2k - 24)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$$

$$D = 9k^2 - 24 \cdot 4k + 64 - 4k^2 + 16k + 192 = k^2 - 32k + 256 = (k - 16)^2$$

$$x_A = \frac{-3k + 8 + k - 16}{2(k^2 - 2k - 24)} = \frac{-k - 4}{k^2 - 2k - 24}$$

$$x_B = \frac{-3k + 8 - k + 16}{2(k^2 - 2k - 24)} = \frac{-4k + 24}{2(k^2 - 2k - 24)} = \frac{-2k + 12}{k^2 - 2k - 24}$$

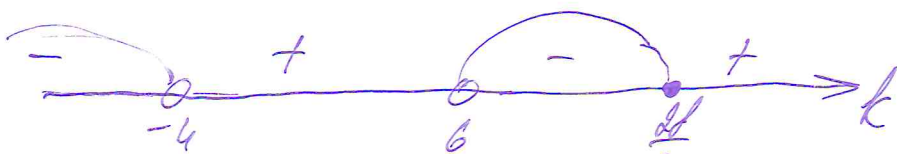
① $x_A \leq 2x_B$

$$\frac{-k - 4}{k^2 - 2k - 24} \leq \frac{-4k + 24}{k^2 - 2k - 24}$$

$$\frac{3k - 28}{k^2 - 2k - 24} \leq 0$$

$$\frac{3k - 28}{(k - 6)(k + 4)} \leq 0$$

$$\begin{cases} k^2 - 2k - 24 = 0 \\ D = 1 + 24 = 5^2 \\ k_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{1} \leq -4 \end{cases}$$



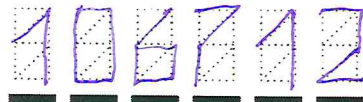
$k \in (-\infty; -4) \cup [6; \frac{28}{3}]$, при условии, что $k \in [0; 11] \Rightarrow$
 $\Rightarrow k \in [6; \frac{28}{3}]$



$$E = mc^2$$



ШИФР



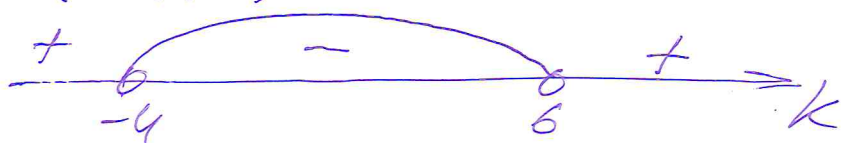
Бланк олимпиадной работы

Задача 5

$$x_B \leq 2x_A$$

$$\frac{-2k-8}{k^2-2k-24} \geq \frac{-2k+12}{k^2-2k-24}$$

$$\frac{20}{(k-6)(k+4)} \leq 0$$



$k \in (-4; 6)$ — условия

Всего вариантов нарисовать точки: $11-6=5$.

$$\text{Вариантов: } \frac{20}{3} - 6 = \frac{10}{3}$$

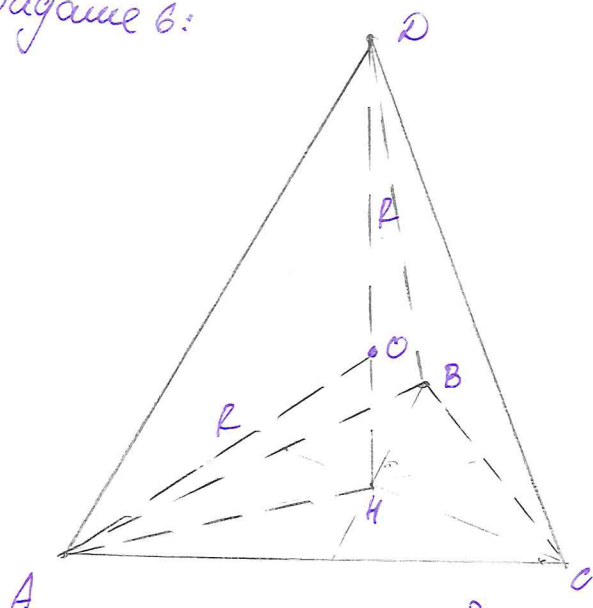
$$P(A) = \frac{10}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{2}{3}$$

20

Бланк олимпиадной работы

Задача 6:



Дано: 10 шаров; сфера $(O; R)$

DH - высота; r - радиус шара

$$r = \sqrt{2} - 1$$

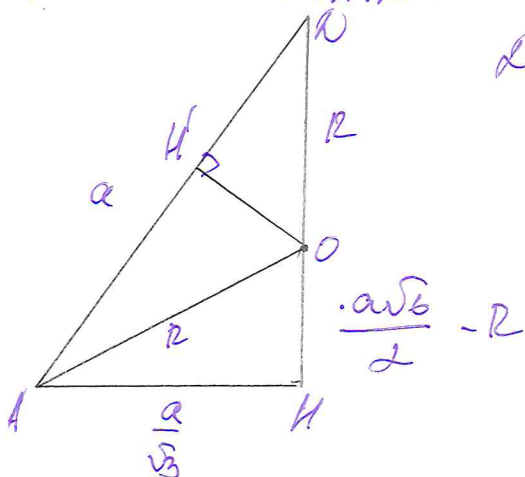
Найти: R - ?

Решим:

Т.к. у нас 10 шаров, то из них получится правильный тетраэдр $AB=BC=AC=AD=DB=DC=a$, т.к. каждая грань состоит из 6 шаров.

O - центр описанной сферы; $DO=OA=R$

Рассмотрим $\triangle AHD$:



$$DH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \quad OH = \frac{a\sqrt{6}}{2} - R$$

Проведем OH:

$\triangle DH'O \sim \triangle DHA$ (по углу)

$$\Rightarrow \frac{DO}{DA} = \frac{DH'}{DH}$$

$$\frac{R}{a} = \frac{\frac{a - 2}{2 \cdot a\sqrt{6}}}{1} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

14.



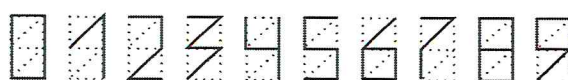
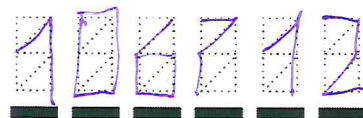
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



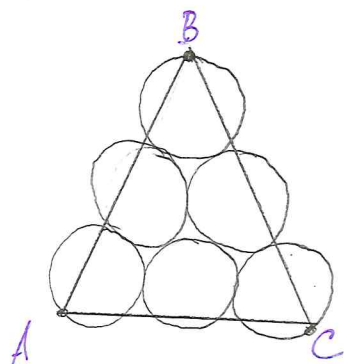
ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Задача в:

Рассчитать $\triangle ABC$.



$$a = 6r.$$

$$\Rightarrow R = \frac{6r}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}r = \sqrt{6}(\sqrt{2}-1)?$$

$$\text{Ответ: } R = \sqrt{6}(\sqrt{2}-1)$$