

ШИФР

107844

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Бланк олимпиадной работы

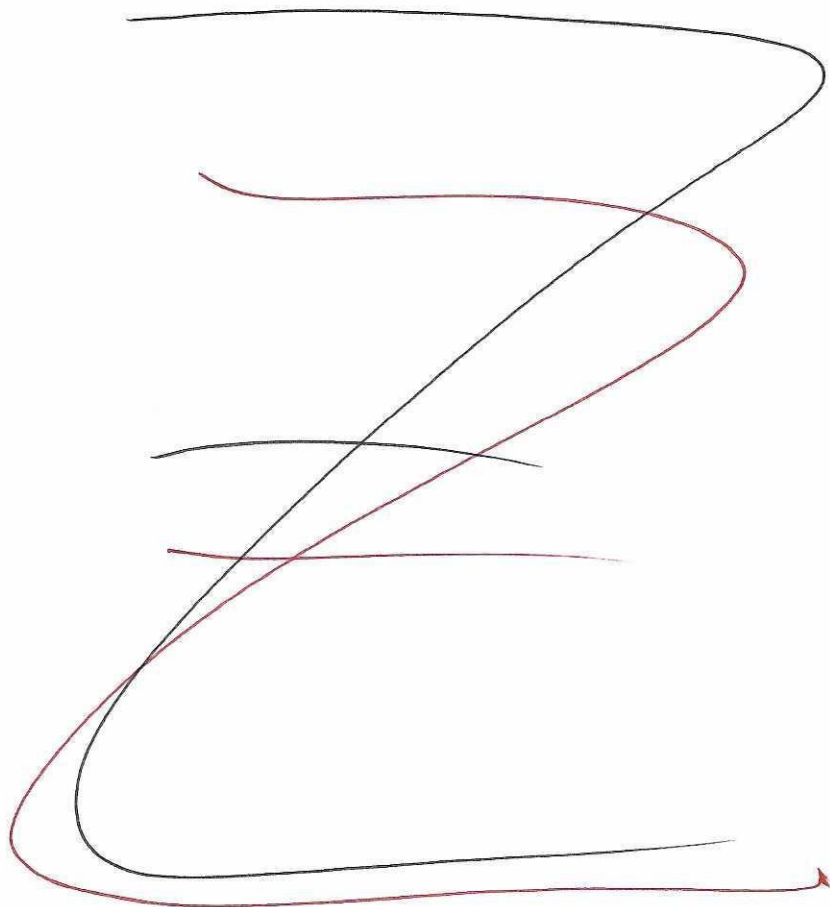
Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

### ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |              | Подпись   |
|--------|---|----|----|---|----|---|---|---|---|----|----------|--------------|-----------|
|        |   |    |    |   |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью     |           |
| Оценка | 5 | 10 | 15 | — | 18 | — |   |   |   |    | 48       | сорок восемь | <i>Мо</i> |



Бланк олимпиадной работы

$\ast (\frac{1}{t})^6 = \frac{1}{t^6}$

1)  $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

Пусть  $t = \frac{a}{3}$

~~$t - \frac{1}{t} = 2$~~

~~$t^2 - 1 = 2t$~~

~~$t^2 - 2t - 1 = 0$~~

~~$t = 1 \pm \sqrt{2}$~~

~~$\frac{a}{3} = 1 \pm \sqrt{2}$~~

~~$a = 3(1 \pm \sqrt{2})$~~

2)  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} =$

$(\frac{a}{3})^6 + (\frac{3}{a})^6 = t^6 + (\frac{1}{t})^6$

Выразим  $t^6 + (\frac{1}{t})^6$  через  $t - \frac{1}{t}$

~~$(t^3 - \frac{1}{t^3})^2 = t^6 - 2 + \frac{1}{t^6}$~~

~~$t^6 + \frac{1}{t^6} = (t^3 - \frac{1}{t^3})^2 + 2$~~

Выразим  $t^3 - \frac{1}{t^3}$  как разность квадратов:

~~$(t^2 - \frac{1}{t})(t^2 + 1 - \frac{1}{t^3}) = t^4 - \frac{1}{t} + t^2 - \frac{1}{t^3} - 1 + \frac{1}{t^2} = t^4 + t^2 - 1 - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}$~~

Затем преобразуем  $t^2 + \frac{1}{t^2}$ :

~~$(t^2 - \frac{1}{t})^2 = t^4 - 2 + \frac{1}{t^2}$~~

~~$t^2 + \frac{1}{t^2} = (t^2 - \frac{1}{t})^2 + 2$~~

Выражение (сверху) =

~~$(t^2 - \frac{1}{t})^2 + 2$~~

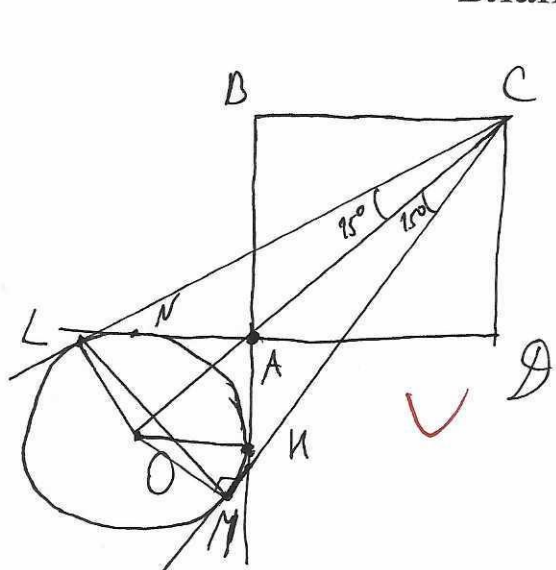
подставим  $t - \frac{1}{t} = 2$

$(2 \cdot (2^2 + 3))^2 + 2 =$

Ответ: 198 ✓

5

Бланк олимпиадной работы



ОК - т. касания окружности и продолжения BA,  
 N - т. касания окружности и продолжения DA.  
 I) т.к. окружность касается двух  
 сторон  $\angle A$   $\Rightarrow$  середина окружности  
 принадлежит биссектрисе  $\angle A$ . по  
 бис-се  $\angle A$  делит угол на два равных  
 угла  $45^\circ$  и  $45^\circ$  и совпадает с CA (т.к.  
 CA - диагональ квадрата  $\Rightarrow$  по свойству  
 квадрата  $\angle ACD = \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow$  CA - бис-се

бис-се AO совпадает с бис-се продол-  
 жением CA.  $\Rightarrow$  O лежит на продолжении  
 CA.

II) по свойству окружности  $\Rightarrow$  угол между касательной и радиусом,  
 проведенный к ней  $= 90^\circ \Rightarrow \angle CMO = \angle CLO = 90^\circ \Rightarrow \angle COM = \angle COL$  (по общему  
 гипотенузе и равным катетам ( $OM = LO$ , т.к. LO и OM - радиусы)  $\Rightarrow$   
 $\angle OCM = \angle OCL = 15^\circ$  (т.к.  $\angle LCM = 30^\circ$ )

III) т.к. OA - бис-се  $\angle A$   $\Rightarrow \angle OAN = 45^\circ$ , но  $\angle ONA = 90^\circ$  (т.к. угол  
 между радиусом и касательной)  $\Rightarrow \angle NOA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$  по условию  
 равноб. треугольника  $\Rightarrow \triangle ONA$  - равнобедренный  $\Rightarrow$  по свойству  
 равноб. треуг.  $\Rightarrow ON = NA = R$  ( $R$  - радиус окружности)

по теореме Пифагора для  $\triangle ONA \Rightarrow OA = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$   $\checkmark$   
 IV) по свойству квадрата  $\Rightarrow CA = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$  (а - длина стороны  
 квадрата)  
 V) из  $\triangle CMO$ :  $\sin \angle MCO \cdot CO = OM \Rightarrow \sin \angle MCO \cdot (CA + AO) = R$

подставим значение угла  $\alpha$   
 $\sin 15^\circ \cdot (\sqrt{2}a + \sqrt{2}R) = R$

$$\sin 15^\circ \cdot \sqrt{2}(a + R) = R$$

$$\sin 15^\circ \cdot \sqrt{2}a = R - R \sin 15^\circ \sqrt{2}$$

$$\sin 15^\circ \cdot \sqrt{2}a = R(1 - \sin 15^\circ \sqrt{2})$$

$$R = \frac{\sin 15^\circ \cdot \sqrt{2}a}{1 - \sin 15^\circ \sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}a}{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sqrt{2}} = \text{Лист 3 из 5}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

продолжение №2

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} a}{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{2(\frac{2-\sqrt{3}+1}{2})} = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{3-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

Ответ: 2 см ✓

10

№3

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 60z + 703 = 0 \\ y^2 + 43x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

сложим все уравнения:

$$*(x-20)^2 = x^2 - 40x + 400$$

$$(y+22)^2 = y^2 + 44y - 484$$

$$(z-23)^2 = z^2 - 46z + 529$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

$$(x-20)^2 - 400 + (y+22)^2 - 484 + (z-23)^2 - 529 + 1413 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 - 1413 + 1413 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

Всё уравнение имеет решение только тогда, когда все квадраты  $\geq 0$  (или  $x=20$  т.е. квадрат любого числа — неотрицательное число)  $\Rightarrow 0$  возможно только в том случае, когда все квадраты равны 0 (иначе будет полож. значение)

Ответ:  $x=20$ ;  $y=-22$ ;  $z=23$ . или  $(20; -22; 23)$ .

15

№5

$$b \in [8; 13]$$

$$(b^2 - 2b - 35)x^2 + (3b - 9)x + 2 = 0$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_2$$

$$D = 9b^2 - 54b + 81 - 8b^2 + 16b + 280$$

$$D = b^2 - 38b + 361$$

$$D = (b-19)^2 \quad \text{при } b \in [8; 13] \quad D > 0$$

$$x = \frac{9-3b+b-19}{2(b^2-2b-35)}$$

$$x = \frac{9-3b+19-b}{2(b^2-2b-35)}$$

$$x = - \frac{5+b}{b^2-2b-35}$$

$$x = \frac{14-2b}{b^2-2b-35}$$

Бланк олимпиадной работы

№5 (продолжение)

Проверим условие для 1 случая:

$$\frac{14-2k}{k^2-2k-35} \leq \frac{-10-2k}{k^2-2k-35}.$$

Рассмотрим  $k^2-2k-35$  при  $k \in [8; 13]$ :

$$k^2-2k-35=0$$

$$\frac{D}{4} = 36$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = 1+6 = 7$$

$$k = 1-8 = -5$$

$\Leftrightarrow$

$$k^2-2k-35 = (k-7)(k+5)$$

при  $\begin{cases} k=7 \\ k=-5 \end{cases}$



$\Leftrightarrow$  при  $k \in [8; 13]$   $k^2-2k-35 > 0$

$$14-2k \leq -10-2k$$

$$14 \leq -10 \Rightarrow k \in \emptyset$$

Рассмотрим 2 случай:

$$\frac{14-2k}{20-4k} \geq -5-k$$

$$3k \leq 33$$

$$\Leftrightarrow k \leq 11 \Rightarrow$$

$$P = \frac{[8; 11]}{[8; 13]} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Лист 5 из 5

18