ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 119294

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СПбПУ

ОЦЕНКА
(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	15	5	20	10	0	0	0	0	60	шестьдесят	[illegible]

Задание 1.

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6}=\frac{a^6}{729}+\frac{729}{a^6}=\left(\frac{a}{3}\right)^6+\left(\frac{3}{a}\right)^6$$

$b\neq 0$, $D=8$

$b=\frac{a}{3}$, нужно найти $b^6+\frac{1}{b^6}$; $b-\frac{1}{b}=2$, $b^2-2b-1=0$

$b_1=1+\sqrt{2}$, $b_2=1-\sqrt{2}$.

• Если b_1:

$$(1+\sqrt{2})^6+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^6=(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6=2^3+6(\sqrt{2})^5+15\cdot 2^2+20\cdot(\sqrt{2})^3+$$
$$+15\cdot 2+6\sqrt{2}+1+2^3-6(\sqrt{2})^5+15\cdot 2^2-20(\sqrt{2})^3+15\cdot 2-6\sqrt{2}+1=$$
$$=2(2^3+15\cdot 2^2+15\cdot 2+1)=198$$

• Если b_2:

$$(1-\sqrt{2})^6+\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^6=(\sqrt{2}-1)^6+(\sqrt{2}+1)^6=198$$

Ответ: 198.

Задание 3.

$$\begin{cases} x^2-22y-69z+703=0 & (1) \\ y^2+23x+23z-1473=0 & (2) \\ z^2-63x+66y+2183=0 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3):

$$x^2-40x+y^2+44y+z^2-46z+1413=0$$

$$(x-20)^2-400+(y+22)^2-484+(z-23)^2-529+1413=0$$

$$(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2=0,\ x=20,\ y=-22,\ z=23 \leftarrow$$ необходимое, но не достаточное условие.

Проверим:

(1): $400+484-2187+703=1587-\overset{1587}{\cancel{2187}}=0$

(2): $484+460+529-1473=1473-1473=0$

Если (1) и (2) верны, то (3) тоже, т.к. сумма 0 $\Rightarrow$ 20, −22, 23 — реш

Ответ: 20, −22, 23.

Задание 5.

$$(k^2-2k-35)x^2+(3k-9)x+2=0$$

$$D=9k^2-54k+81-8k^2+16k+280=k^2-38k+361=(k-19)^2$$

- $\Rightarrow$ корни таковы: $\dfrac{9-3k+19-k}{2(k^2-2k-35)}=\dfrac{28-4k}{2(k^2-2k-35)}=\dfrac{14-2k}{k^2-2k-35}$ и

$$\frac{9-3k-19+k}{2(k^2-2k-35)}=-\frac{k+5}{k^2-2k-35}.$$

$k^2-2k-35$ сравним с 0: вершина ~~в~~ при $k=1$, $64-16-35>0 \Rightarrow$ при $k\in[8;13]$ знаменатель в дробях полож.

$\Rightarrow$ дроби точно отрицательные, т.к. $\cancel{28-36<0}$ $14-16<0$

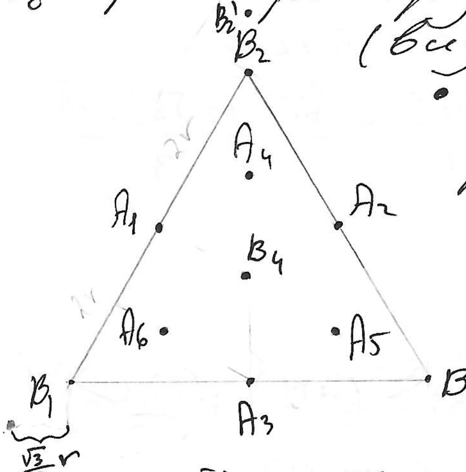
- Нужно, чтобы $\dfrac{k+5}{2k-14}\geqslant 2$ (1), либо $\dfrac{2k-14}{k+5}\geqslant 2$ (2) (т.к. обе дроби отриц., то $-a\leq -2b \Leftrightarrow a\geq 2b,\ \frac{a}{b}\geq 2$)
- (1): $k+5\geqslant 4k-28,\ 33\geqslant 3k,\ k\leqslant 11 \Rightarrow k\in[8;11]$ подходит
- (2): $2k-14\geqslant 2k+10$, никогда не верно. $\Rightarrow p=\frac{3}{5}=0{,}6$

Ответ: 0,6.

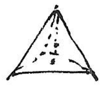
Бланк олимпиадной работы

Задание 6.

Центры шаров представляют собой следующую конструкцию (вид сверху) B_4' – проекция B_4 на $(B_1B_2B_3)$



- Пусть расстояние от B_4 до $(B_1B_2B_3)$ равно H. Выразим H через радиус шара r: $B_1B_4' = \frac{2}{\sqrt3}\cdot A_1B_1 = \frac{4r}{\sqrt3}$.



$B_1B_4'^2 + H^2 = (4r)^2$, $\frac{16r^2}{3} + H^2 = 16r^2$,

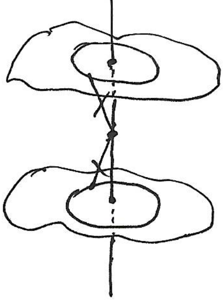
$H = \frac{4\sqrt2\, r}{\sqrt3}$.

Пусть радиус описанной сферы $(B_1B_2B_3B_4)$ равен R, тогда её центр на расстоянии $\frac{4\sqrt2}{\sqrt3}r - R$ от $(B_1B_2B_3)$.

$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{4\sqrt2}{\sqrt3}r - R\right)^2 + B_1B_4'^2 = \left(\frac{4\sqrt2}{\sqrt3}r - R\right)^2 + \frac{16r^2}{3}$,

$\frac{32}{3}r^2 - \frac{8\sqrt2}{\sqrt3}rR + \frac{16r^2}{3} = 0 \Rightarrow R = \frac{\sqrt3}{8\sqrt2}\cdot 16r = \sqrt6\, r$,

~~тогда $r = 1 + \frac{\sqrt6}{6}$ (т.к. $R = \sqrt6 + 1$)~~

- 

Точка, находящаяся посередине между $(A_1A_2A_3)$ и $(A_4A_5A_6)$ и принадл. B_4B_4' равноудалена от всех 6 A_i.

Расстояние между пл-тями равно $\frac{H}{2} = \frac{2\sqrt2}{\sqrt3}r$.

$B_4'A_1 = \frac{2r}{\sqrt3} \Rightarrow OA_1^2 = \left(\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}r\right)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt3}\right)^2 =$

$\Rightarrow OA_1 = \frac{2}{\sqrt3}r\cdot\sqrt{2+1} = \sqrt2 r \Rightarrow$ у центрального шара радиус $(\sqrt2-1)r$.

- Найдём радиус сферы, описанной около „пирамиды" из шаров. Её центр совпадает с центром $B_1B_2B_3B_4$. Она касается пирамиды в т-ках B_1', B_2' и B_3' ($B_1B_1' = r$).

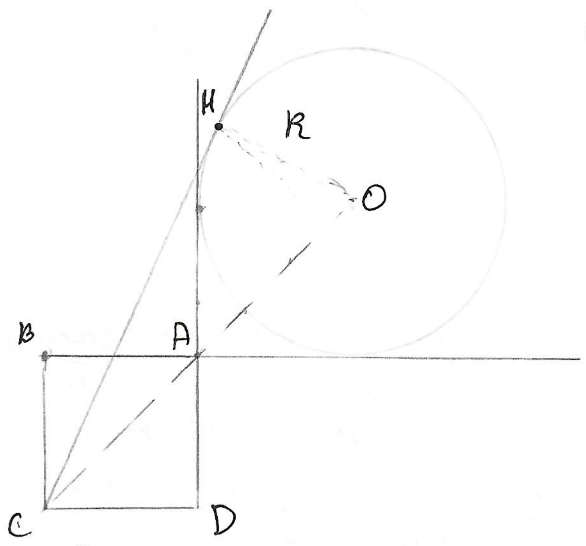
$B_1'B_3' = (\sqrt3+4)r. \Rightarrow$ коэффициент подобия $1 + \frac{\sqrt3}{4}$.

$\Rightarrow R' = \left(1+\frac{\sqrt3}{4}\right)\cdot R = \left(1+\frac{\sqrt3}{4}\right)\cdot\sqrt6 r = \left(\sqrt6 + \frac{3\sqrt2}{4}\right)r$.

$\Rightarrow r = \frac{\sqrt6+1}{\sqrt6+\frac{3\sqrt2}{4}} = \cancel{\frac{2(24-6\sqrt3+4\sqrt6-3\sqrt2)}{27}} \Rightarrow$ радиус ц.ш. $\frac{(\sqrt2-1)(\sqrt6+1)}{\sqrt6+\frac{3\sqrt2}{4}}$

Ответ: $\frac{(\sqrt6+1)(\sqrt2-1)}{\sqrt6+\frac{3\sqrt2}{4}}$.

Задание 2.



$OH = R$, $OC = OA + AC = \sqrt{2}R + \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}$

$\angle HCO = 15^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ = \dfrac{OH}{OC}$,

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}R + 2\sqrt{6}}$,

$\sqrt{6}R - 6\sqrt{2} + \sqrt{2}R - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{2}R$

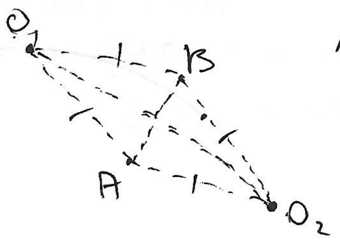
$\Rightarrow (\sqrt{6} - \sqrt{2})R = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$,

$R = \dfrac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \dfrac{(6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{3} =$

$= 8 + \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $8 + \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Задание 4.



Нужно, чтобы $AB = 18$. $(O_2B)^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{O_1O_2}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 41^2 = 9^2 + \left(\dfrac{O_1O_2}{2}\right)^2 \Rightarrow O_1O_2 = 80.$

$\Rightarrow R = 80$ (правильный шестиугольник)

Внешний радиус кольца $80\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 9$,

внутренний $80\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 9$.

$\Rightarrow S = \pi\left((40\sqrt{3}+9)^2 - (40\sqrt{3}-9)^2\right) = \pi\cdot 18\cdot 80\sqrt{3} =$

$= 1440\sqrt{3}\pi$

Ответ: $1440\sqrt{3}\pi$.