ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 102498

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания СПбПУ

ОЦЕНКА
(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	5	10	10	0	0	0	0	55	пятьдесят пять	[illegible]

Задание №1:

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6} = \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6}$$

по условию: $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

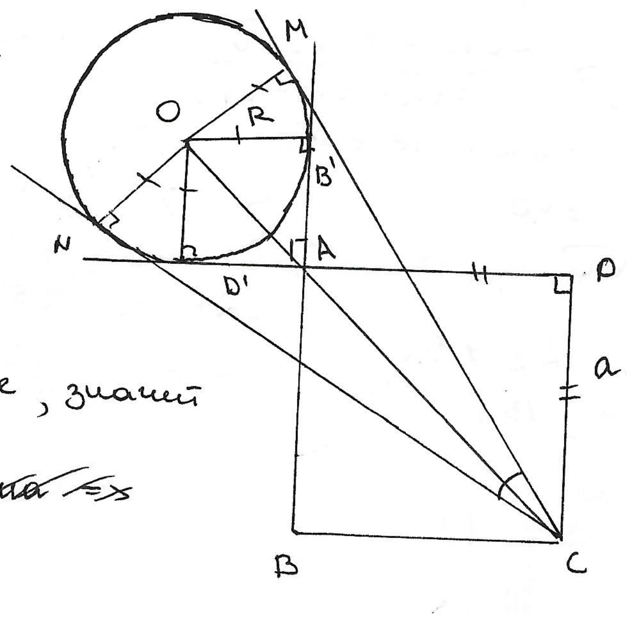
так же:
$$x = \frac{a^{12}+729^2}{729a^6} = \frac{(a^6-3^6)^2+2a^6 3^6}{3^6a^6} = 2 + \left(\frac{a^6-3^6}{3^3a^3}\right)^2$$

$$* \quad \frac{a^6}{3^3a^3} - \frac{3^6}{3^3a^3} = \frac{a^3}{3^3} - \frac{3^3}{a^3} = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)\left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{a}{3}\cdot\frac{3}{a} + \frac{3^2}{a^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)\left(\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 + 2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{3}{a} + 1\right) = 2\left((2)^2+2+1\right) = 2\cdot 7 = 14$$

$x = 2 + (14)^2 = 2 + 196 = 198$ Ответ: 198

Задание №2:



1) т.к. AB и AD - касательные в точках B' и D', то $\angle AB'O = \angle AD'O = 90°$ и $\angle B'AD' = 90°$ ($AB \perp AD$) и $AB' = AD'$ как отрезки касательной
=> AB'OD' - квадрат:
$AB' = AD' = B'O = D'O = R$

2) MC и NC - касательные, значит $\angle CMO = \angle CNO = 90°$

~~3) ΔMCO = р/б, CO - медиана =>~~

3) CO - биссектриса $\angle MCO$
=> $\angle NCO = \angle MCO = 15°$

5) тогда $R = OC \sin 15°$

6) $OC = AC + OA = \sqrt{2}a + \sqrt{2}R$ (AC – диагональ квадрата $ABCD$, OA – диагональ квадрата $AB'OD'$)

7) $R = \sqrt{2}a \sin 15° + \sqrt{2}R \sin 15°$

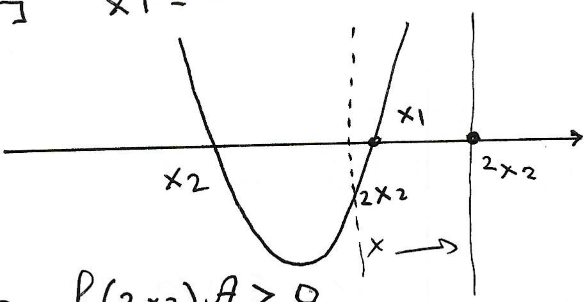
$R(1 - \sqrt{2}\sin 15°) = \sqrt{2}a \sin 15° \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{2}\sin 15° \, a}{1 - \sqrt{2}\sin 15°}$

8) $R = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\cancel{\sqrt{2}}}}{1 - \cancel{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\cancel{\sqrt{2}}}} \cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\cancel{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}+1}{\cancel{2}}\right)} 2\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} 2\sqrt{3} = \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} 2\cancel{\sqrt{3}} = 2$

Ответ: $R = 2$

Задание №5

$k \in [8; 13]$ $\quad x_1 \le 2x_2$



По теореме о расположении корней квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C = 0$, если $x_1 \le 2x_2$, значит что оба корня лежат не правее чем $2x_2$. Получается, что $f(2x_2)A \ge 0$

Составим систему:

$$\begin{cases} D > 0 & \text{(два корня)} \\ f(2x_2)A \ge 0 \\ A \ne 0 & \text{(р-во нужно рассм. отдельно)} \end{cases}$$

$* \; A = k^2 - 2k - 35 = 0$

$D/4 = 1 + 35 = 36$

$k = 1 \pm 6 \qquad k_1 = -5 \quad k_2 = 7$

при $k \in [8; 13]$ $\quad \underline{A > 0}$

$\Rightarrow \boxed{f(2x_2) \ge 0}$

$* \; D = (3k-9)^2 - 4(k^2 - 2k - 35) \cdot 2 = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 35 \cdot 8 =$

$= k^2 - 38k + 261 \boxed{=} (k - (18 + 3\sqrt{7}))(k - (18 - 3\sqrt{7}))$ • Сравним:

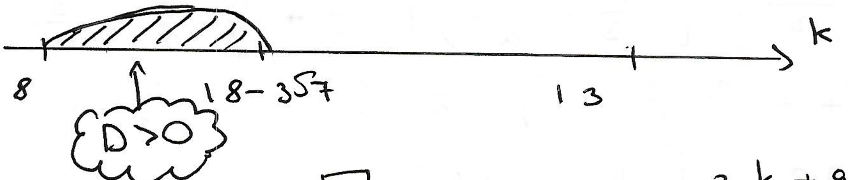
$D^*/4 = 18^2 - 261 = 324 - 261 = 63 \qquad k = 18 \pm 3\sqrt{7}$

$18 + 3\sqrt{7} > 13$

$13 > 18 - 3\sqrt{7} > 8$

$3\sqrt{7} > 5 \quad 10 > 3\sqrt{7}$

$63 > 25 \quad 100 > 63$



• $x_1 = \dfrac{-3k + 9 - \sqrt{D}}{2(k^2 - 2k - 35)} \qquad x_2 = \dfrac{-3k + 9 + \sqrt{D}}{2(k^2 - 2k - 35)}$ $\qquad \boxed{x_1 \le 2x_2}$

$\boxed{2(k^2 - 2k - 35) > 0}$

$\dfrac{-3k + 9 - \sqrt{D}}{2(k^2 - 2k - 35)} \le \dfrac{-6k + 18 + 2\sqrt{D}}{2(k^2 - 2k - 35)}$

$-3k + 9 - \sqrt{D} \le -6k + 18 + 2\sqrt{D}$

$3k - 9 \le 3\sqrt{D}$ $\qquad k - 3 > 0$, т.к. $k \in [8; 13]$

$k - 3 \le \sqrt{D} \iff \cancel{k^2} - 6k + 9 \le \cancel{k^2} - 38k + 261$

$32k \le 252$

$k \le \dfrac{3 \cdot 84}{25} = \dfrac{3 \cdot 21 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 8} = \dfrac{63}{8} = 7\dfrac{7}{8}$

т.е. $x_1 \le 2x_2$ при условии, что $k \le 7\,^7/_8$,

а у нас $k \in [8; 13]$

$\Rightarrow$ вероятность 0

Ответ: 0

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

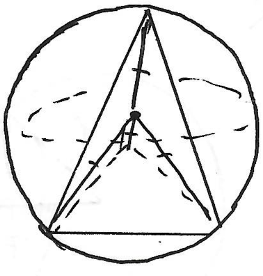
ШИФР 102498

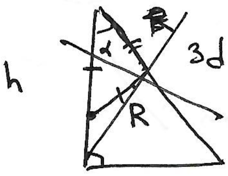
0123456789

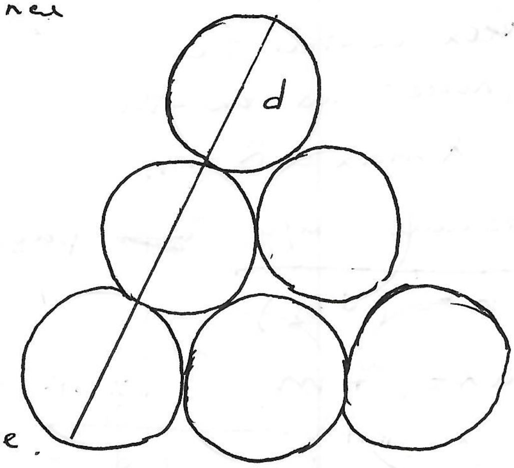
Бланк олимпиадной работы

6 1) Из 10 одинаковых шаров получился правильный тетраэдр со стороной 3d

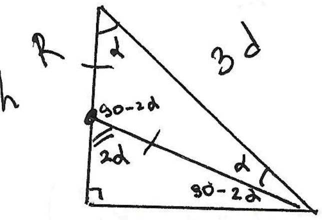
2)







Центр описанной сферы р/у от всех вершин тетраэдра и лежит на высоте.



$\cos\alpha = \frac{h}{3d}$

по т. косинусов:

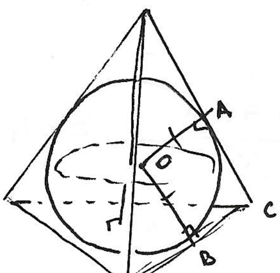
$9d^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(90^\circ - 2\alpha) = 2R^2 - 2R^2\sin\alpha$

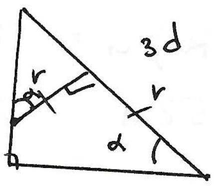
$2R^2(1-\sin\alpha) = 9d^2$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{h}{3d}\right)^2}$

$\sin\alpha = \frac{2R^2 - 9d^2}{2R^2}$

центр вписанной сферы р/у от всех сторон тетраэдра и лежит на высоте

3)





$\sin\alpha = \frac{h}{3d}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3d-r}{r}$

OABC - квадрат, т.к. противоположные стороны равны (=> ромб) и два угла по 90°

$\operatorname{tg}(\arcsin A) = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$

4) Высота правильного тетраэдра

$h = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9d^2} = \sqrt{6}\,d$

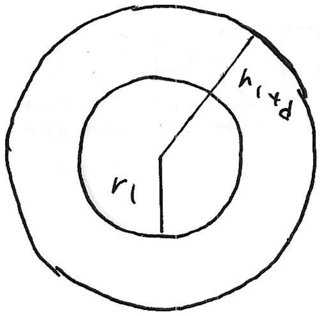
$$\begin{cases} \dfrac{\frac{h}{3d}}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{3d}\right)^2}} = \dfrac{3d-r}{r} \\ \sqrt{1-\left(\frac{h}{3d}\right)^2} = \dfrac{2R^2-9d^2}{2R^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow r = \frac{9d(2R^2-9d^2)}{2\sqrt{6}R^2 + 3(2R^2-9d^2)}$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}\cancel{d}}{3\cancel{d}}}{\frac{2R^2-9d^2}{2R^2}} = \frac{3d-r}{r} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}R^2}{3(2R^2-9d^2)} = \frac{3d-r}{r}$$

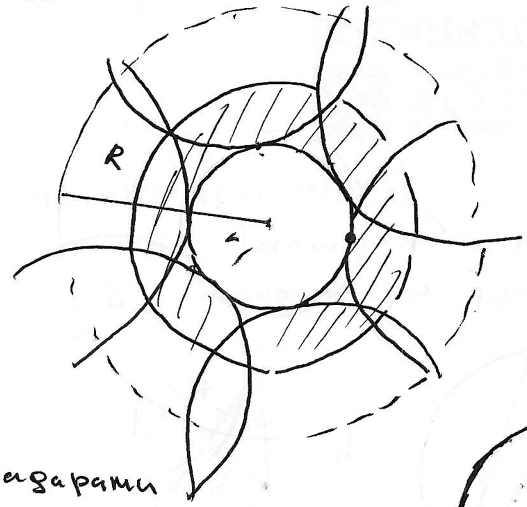
Ответ: $r = \frac{9d(2R^2-9d^2)}{2\sqrt{6}R^2 + 3(2R^2-9d^2)}$, где d - диаметр шара.

4



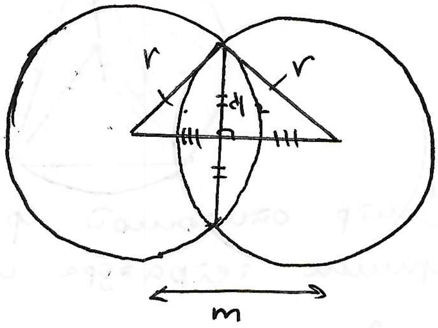
Максимальное расстояние

$X_{max} = R + r_1$



Центры всех ок-тей, т.е. радары, лежат на ок-ти радиуса $X_{max} = R + r_1$.

m - расстояние м/у ~~~~ радарами



$m = \sqrt{r^2 - (d/2)^2}$

$2\pi X_{max} = 7m$

$X_{max} = \frac{7}{2\pi}\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{7}{2\pi}\sqrt{41^2 - 9^2} =$

$= \frac{7}{2\pi}\sqrt{1681 - 81} = \frac{7}{2\pi}\cdot 40 = \boxed{\frac{70}{\pi}}$

- $S = \pi(r_1+d)^2 - \pi r_1^2 = \cancel{\pi r_1 (r_1 + 2d)}\ \pi(\cancel{r_1^2} + 2r_1 d + d^2 - \cancel{r_1^2})$

$S = \pi d(d + 2r_1)$

$r_1 = X_{max} - R = \frac{70}{\pi} - R$

$S = \pi d^2 + 2\pi\left(\frac{70}{\pi} - R\right)d = 18^2\pi + \frac{36\cdot 70\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} - 36\pi\cdot 41 =$

$= 324\pi - 1476\pi + 2520 = 2520 - 1152\pi$

Ответ: $X_{max} = \frac{70}{\pi}$ ~~+ 1152~~

$S = (2520 - 1152\pi)$ км^2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 102498

Бланк олимпиадной работы

Задание №3

$$\begin{cases} x^2-22y-69z+703=0 \\ y^2+23x+23z-1473=0 \\ z^2-63x+66y+2183=0 \end{cases}$$

$x^2-22y-69z+703+y^2+23x+23z-1473+z^2-63x+66y+2183=0$

$x^2-40x+y^2+44y+z^2-46z-770+2183=0$

$x^2-2\cdot x\cdot 20+400+y^2+2\cdot y\cdot 22+484+z^2-2\cdot z\cdot 23+529=0$

$(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2=0$

Сумма квадратов равна нулю тогда, когда каждый из них равен нулю.

$$\left[\begin{array}{l} x-20=0 \\ y+22=0 \\ z-23=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=20$, $y=-22$, $z=23$

• Проверим:

$400+484-1587+703=884+703-1587=1587-1587=0$

Далее аналогично