

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 2/ Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СПБПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	3	5	0	20	10	10	0	0	0	0	48	сорок восемь	

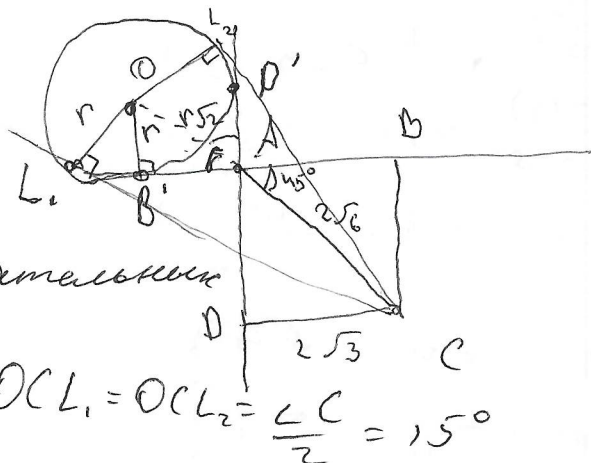
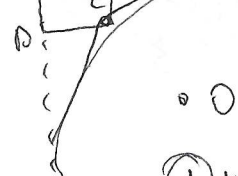
№1. Дано: $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$; Найти: $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6}$; Решение: $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$; $a \neq 0$;
 $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \cdot \frac{1}{3a}$; $a^2 - 6a - 9 = 0$; $(a-3)^2 - 9 - 9 = 0$; $(a-3-3\sqrt{2})(a-3+3\sqrt{2}) = 0$
 $\begin{cases} a_1 = 3+3\sqrt{2} \\ a_2 = 3-3\sqrt{2} \end{cases}$; $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$; $a_1, a_2 = (3+3\sqrt{2})(3-3\sqrt{2}) =$
 $= 9 - 18 = -9$; $a_1 = -\frac{9}{a_2}$; $\left(\frac{a_1}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a_1}\right)^6 = \left(\frac{a_1}{3}\right)^6 + \left(\frac{a_1}{3}\right)^6 = 2\left(\frac{a_1}{3}\right)^6 =$
 $= 2\left(\frac{3+3\sqrt{2}}{3}\right)^6 = 2(1+\sqrt{2})^6 = 2(\sqrt{2}^6 + 6\sqrt{2}^5 + 15\sqrt{2}^4 + 20\sqrt{2}^3 + 15\sqrt{2}^2 + 6\sqrt{2} + 1) =$
 $= 2(8 + 24\sqrt{2} + 60 + 40\sqrt{2} + 30 + 6\sqrt{2} + 1) = (99 + 70\sqrt{2}) \cdot 2 = 198 + 140\sqrt{2}$

Ответ: $198 + 140\sqrt{2}$

№2 Дано: окружность $(O; r)$ касается прямых AB, AD ; $ABCD$ - квадрат
 $a = 2\sqrt{3}$; $\angle C = 30^\circ$; $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ Найти: r

Решение:

~ тупой угол



① по Точке касательных
к окружности:

CL_1 - касательная $\Rightarrow \angle OCL_1 = \angle OCL_2 = \frac{\angle C}{2} = 15^\circ$

AD
 AB - касательные $\Rightarrow$
 $\angle OAB' = 45^\circ$
 $\angle OAD = 45^\circ$

$\triangle OAB$ - прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$$OA = \frac{r}{\sin 45^\circ} = r\sqrt{2}$$

$\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow AC = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

$\triangle OCL_1$ - прямоугольный ($\angle L_1 = 90^\circ$): $r = \sin 15^\circ OC$

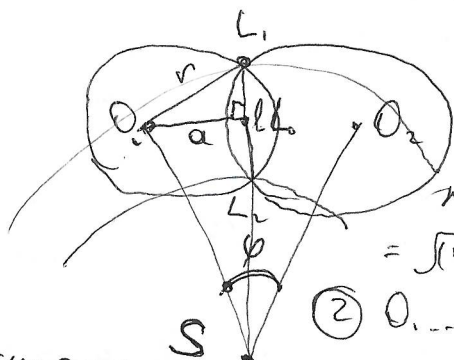
$$r = \sin 15^\circ r\sqrt{2} + \sin 15^\circ \cdot 2\sqrt{6}; \quad r(1 - 2\sqrt{2} \sin 15^\circ) = 2\sqrt{6} \cdot \sin 15^\circ;$$

$$r = \frac{2\sqrt{6} \sin 15^\circ}{1 - 2\sqrt{2} \sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{1 - (\sqrt{3}-1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} = 6+\sqrt{3}-3 = 3+\sqrt{3}$$

Ответ: $3+\sqrt{3}$

№4. Дано: $l = 18$ км $n = 7$; $r = 41$ км

Решение



① $Окр(O_1) \cap Окр(O_2) = L_1, L_2$
 $L_1, L_2 \perp O_1O_2$; $L_1, L_2 \cap O_1O_2 = L_0$

$\triangle L_1O_1L_0$ - прямоугольный;
 по теореме Пифагора: $a^2 = r^2 - (\frac{L}{2})^2 =$
 $= \sqrt{41^2 - 2 \cdot 2 \cdot 16} = \sqrt{25 \cdot 2} = 10$

② $O_1, \dots, O_n$ - правильный n -и график
 со стороной $2a = 80$; $\varphi = \frac{2\pi}{7}$; $\angle O_1SL_2 = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{7}$

$\triangle O_1L_0S$ - прямоугольный ($\angle L_0 = 90^\circ$): $R = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{40}{\sin \frac{\pi}{7}}$

$$L_0S = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot 40$$

$$\textcircled{2} S = S_1 - S_2 = \pi (L_0S + a)^2 - \pi (L_0S - a)^2 = \pi \cdot 2L_0S \cdot 18 = 36\pi \cdot 40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} = 1440 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot \pi$$

Ответ: $S_{\text{кан}} = \frac{40}{\sin \frac{\pi}{7}}$; $S = 1440\pi \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$

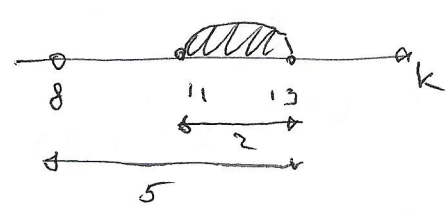
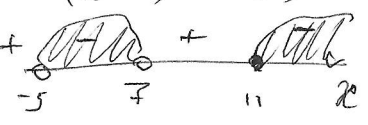
№5 Дано: $P = [8; 13]$; $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$

$$x_1 \leq 2x_2$$

Решение: $D = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k-19)^2 \geq 0$
 $x_{1,2} = \frac{9-3k \pm |k-19|}{2(k-7)(k+5)}$, $k \in [8; 13] \Rightarrow k-19 < 0$; и

$$x_1 = \frac{9-3k+(k-19)}{2(k-7)(k+5)} \quad x_2 = \frac{9-3k-(k-19)}{2(k-7)(k+5)}$$

$$\frac{-66+6k}{2(k-7)(k+5)} \leq 0 \quad f(k) = \frac{-6(11-k)}{2(k-7)(k+5)} \quad \text{Нужно } f(k) \geq 0$$



$$P(A) = \frac{2}{5} = 0,4$$

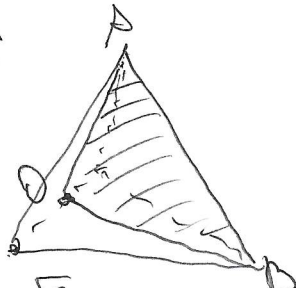
$$A: x_1 \leq 2x_2$$

Ответ: $P(A) = 0,4$

Бланк олимпиадной работы

№6 Дано: $R = \sqrt{6} + 1$ $n = 10$ Найти: r

Решение:



2:



$$R = \frac{\sqrt{6}}{2} a \Rightarrow 2l + r = \sqrt{\frac{6}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a; \quad a = \frac{2}{\sqrt{6}} R$$

$$\frac{r+l}{r+2l} = \frac{2l}{\frac{a}{2}}; \quad \frac{r+l}{\frac{\sqrt{5}}{2} a} = \frac{2l}{\frac{a}{2}}; \quad r+l = \frac{2}{\sqrt{5}} l$$

$$r = l(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}); \quad l = \frac{r}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$2l + r = \frac{\sqrt{5}}{2} a; \quad \frac{2r}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} + r = \frac{\sqrt{5}}{2} a; \quad (\frac{2}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} + 1) r = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} R$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{2 + 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} \right) \cdot (\sqrt{6} + 1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \left(\frac{\frac{3 \cdot \sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}}} \right) \cdot (\sqrt{6} + 1)$$

