



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

102427

0123456789



$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12 февраля

Площадка написания СПБ ЛУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	20	0	0	0	0	0	70	семидесят	

№1. Две начала вычислим a :

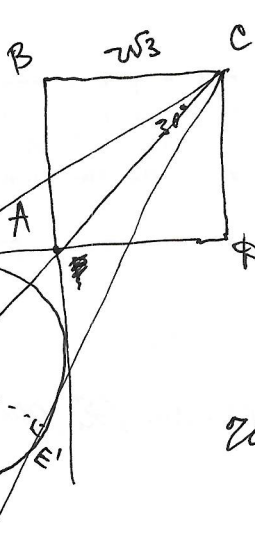
$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \quad \frac{a^2 - 9 - 6a}{3a} = 0 \quad \begin{cases} a^2 - 6a - 9 = 0 \quad (1) \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \frac{D}{4} = 9 + 9 = 18 \quad a_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} &= \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = \\ &= \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{a}{3} - 2\right)^6 = (1 \pm \sqrt{2})^6 + (1 \pm \sqrt{2} - 2)^6 = (1 \pm \sqrt{2})^6 + (-1 \pm \sqrt{2})^6 = \\ &= (1 \pm \sqrt{2})^6 + (1 \mp \sqrt{2})^6 = (1 \pm 6\sqrt{2} + 15 \cdot 2 \pm 20 \cdot 2\sqrt{2} + 15 \cdot 4 \pm 6 \cdot 4\sqrt{2} + 8) + \\ &= 2(1 + 15 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 8) = 2(1 + 30 + 60 + 8) = 2 \cdot 99 = 198. \end{aligned}$$

Ответ: 198.



$R = ?$ Проведём радиус OC в точку касания касательной к окружности в вершине C . ($OE \perp CE$).

Tega $\sin \angle OCE = \frac{OE}{CO} = \frac{R}{CO} \Rightarrow R = CO \sin \angle OCE. (*)$

Посчитав, что $\angle OCE = \frac{1}{2} \angle ECE' = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$

отсюда $R = CO \cdot \sin 15^\circ = CO \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

transien CO: $CO = CA + AO$

$$\triangle ABC: AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = 2\sqrt{6}.$$

Опустим перпендикуляр (параллель) на
прямую (AD) . Получим $OF \perp (AD)$.

$$QF = AF = R$$

снегохранилища:

$$\triangle AFO: AO = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Поэтому $CO = 2\sqrt{6} + R\sqrt{2}$; откуда (подставим в (*))

$$R = (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$R = \cancel{\sqrt{2}} / (2\sqrt{3} + R) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\cancel{2\sqrt{2}}}$$

$$R = (2\sqrt{3} + R) \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot 2$$

$$2R = (2\sqrt{3} + R)(\sqrt{3} - 1)$$

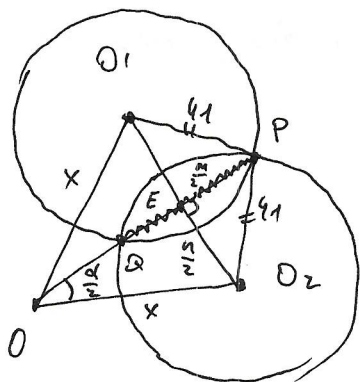
$$2R = 6 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}R - R \quad (2 + 1 - \sqrt{3})R = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$(3-\sqrt{3})R = 2(3-\sqrt{3})$$

$$k=2.$$

Sept. 2.

№ 4. Пометим, что центр окружностей лежит на лучах, угол между которыми ормасовот, то есть составляет угол $\alpha = \frac{\pi}{7}$. (т.к. если угол неравномерен, хорда между точками пересечения ор-тей уменьшается). Рассмотрим два парара и соответствующие им лучи.



0-гома сферической пифагорич

$O_{1,2}$ - точки пересечения

$OO_1 = OO_2 = x$ - расстояние до парабол (используем)

$PQ = m$ - ширина косы

$$Q_{O_2} = n.$$

$$\Delta E_{PO_2}: \frac{m}{2} = \sqrt{41^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} \quad (1)$$

$$\Delta OEO_2: \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{n}{2}}{x} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{n}{2x} \Rightarrow \frac{n}{2} = x \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

перета функции (2) в (1):

$$\frac{m}{2} = \sqrt{41^2 - x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{41^2 - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{7}} \quad (\text{см. павет})$$

мет 2 из 4

Бланк олимпиадной работы

Известно, что для того чтобы ширина крива была больше 18, т.к. ширина крива должна быть не менее 18. Отсюда.

$$\sqrt{41^2 - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{7}} = \frac{m}{2} \geq 9 \quad 41^2 - x^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \geq 81$$

$$x^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \leq 41^2 - 81 \quad x^2 \leq \frac{41^2 - 81}{\sin^2 \frac{\pi}{7}} \quad x \leq \sqrt{\frac{41^2 - 81}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}}$$

Тогда максимальное значение x есть

$$x = \sqrt{\frac{41^2 - 81}{\sin^2 \frac{\pi}{7}}} = \frac{\sqrt{41^2 - 81}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{(41-9)(41+9)}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{32 \cdot 50}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{2^5 \cdot 5^2 \cdot 2}}{\sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^6 \cdot 5^2}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2^3 \cdot 5}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{40}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

Изобразим эту кривую и найдем как радиусы окружностей с радиусами OR и OQ соответственно.

$$OR = OE + ER = x \cos \frac{\pi}{7} + \frac{m}{2} = 40 \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} + 9 = 40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + 9$$

$$OQ = OE - EQ = x \cos \frac{\pi}{7} - \frac{m}{2} = 40 \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} - 9 = 40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} - 9$$

$$S_{\text{крива}} = S_{\text{внешн}} - S_{\text{внутр}} = \pi (40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + 9)^2 - \pi (40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} - 9)^2 =$$

$$= \pi (40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + 9 - 40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + 9)(40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + 9 + 40 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} - 9) =$$

$$= \pi \cdot 18 \cdot 2 \cdot 40 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} = 1440 \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$$

Ответ: $\frac{40}{\sin \frac{\pi}{7}}$; $1440 \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$.

5. Найдем, какой вид функции имеет корни этого уравнения.

$$D = (3k-9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 =$$

$$= k^2 - 38k + 361 = (k-19)^2$$

$$x_1 = \frac{-3k+9 \pm (k-19)}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-3k+9 \pm (k-19)}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-2k-10}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-k-5}{(k+5)(k-7)}$$

$$= -\frac{1}{k-7}$$

$$x_2 = \frac{-3k+9+|k-19|}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-3k+9+19-k}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-4k+28}{2(k^2-2k-35)}$$

$$= \frac{-2k+14}{k^2-2k-35} = \frac{-2(k-7)}{(k+5)(k-7)} = -\frac{2}{k+5}.$$

$$1. -\frac{1}{k-7} \leq 2 \cdot \left(-\frac{2}{k+5}\right) \quad \frac{1}{k-7} \geq \frac{4}{k+5} \quad k+5 \geq 4k-28$$

$$3k \leq 33 \quad k \leq 11$$

$$2. -\frac{2}{k+5} \leq 2 \cdot \left(-\frac{1}{k-7}\right) \quad \frac{2}{k+5} \geq \frac{2}{k-7} \quad \frac{1}{k+5} \geq \frac{1}{k-7}$$

$$k-7 \geq k+5 \quad -7 \geq 5 \text{ нет решений.}$$

Таким образом, корни уравнения
 имеют условие при $8 \leq k \leq 11$. Значит вероятность
 равна отношению длины отрезков $[8, 11]$ и $[8, 13]$.

$$p = \frac{|11-8|}{|13-8|} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

№3. сложим все три равенства, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0$$

перегруппируем слагаемые в виде

$$(x^2 - 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 - 46z + 529) = 0$$

то во всех группах получим полные квадраты:

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-20=0 \\ y+22=0 \\ z-23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{cases}$$

Ответ: $x=20$; $y=-22$; $z=23$.