



$E = mc^2$



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания СПБПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3 | 4                   | 5  | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |                 | Подпись |
|--------|---|----|---|---------------------|----|----|---|---|---|----|----------|-----------------|---------|
|        |   |    |   |                     |    |    |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью        |         |
| Оценка | 1 | 10 | 0 | <del>15</del><br>15 | 20 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0  | 81       | шестьдесят один |         |

Задача 1.  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6}$

$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \quad | \cdot 2$

$\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} - 2 = 2$

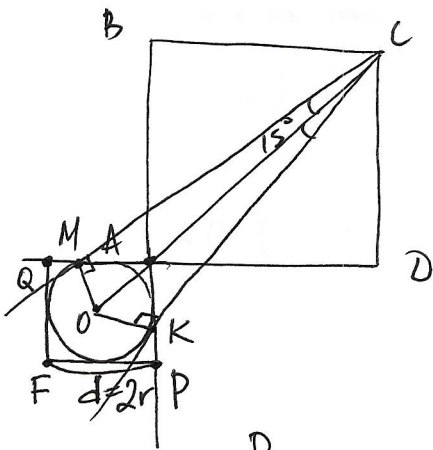
$\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} = 4 \quad | \cdot 3$

$\frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} + 3 \left( \frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} \right) = 64$

$\frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = 64 - 12 = 52$

Ответ: 52.

## Задача 2.



Дано:

к-т ABCD,  $AB = 2\sqrt{3}$  см

окр. кас. пр-м. AB и AD

из (.) C кас. CM и CK

$$\angle MCK = 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Найти:  $r$  - ?

Решение:

1. проведем QF и PF:  $QF \parallel AP$ ,  $PF \parallel QA$

(.)  $P \in$  пр-м. AB, (.)  $Q \in$  пр-м. AD)

окр. (.) O кас. пр-м. AB и AD  $\Rightarrow$  окр. (.) O кас. QF и PF,

$$r = \frac{FP}{2} \quad \text{QAPF - к-т}$$

2.  $\angle CMO$ ,  $\angle CKO$  - вертикальные (.) M, K - (.) кас.)

3. ~~исх. гипотеза к  $\triangle CMO$ :~~

\* пр-уг  $\triangle CMO$ :

$$\angle OCM = \frac{\angle MCK}{2} = 15^\circ \quad (\triangle CMO = \triangle CKO \text{ по кат. и зн.} \Rightarrow \angle MCO = \angle OCK)$$

$$\sin 15^\circ = \frac{OM}{OC} = \frac{r}{OA+AC} = \frac{r}{r\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

д-к-та QAPF

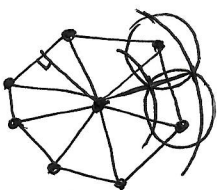
$$r \cdot 2\sqrt{2} = r\sqrt{6} + 6\sqrt{2} - r\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

$$3r\sqrt{2} - r\sqrt{6} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

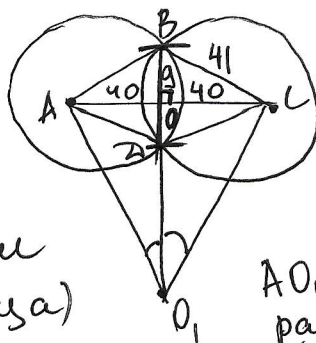
$$r = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = 2$$

Ответ: 2.

## Задача 4.



$BD = 18$  км  
(шир. кольца)



$AO_1$  - иск.  
расстояние  
( $O_1$  - центр платформы)

1. Если соединить 7 радаров, стоящих на кругу, получится правильный семиугольник.



Бланк олимпиадной работы

Сторона ромба  $ABCD = AC$  (д ромба  $ABCD$ ).

$$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (по т. Пифагора в } \triangle BOE).$$

$$2. \angle AOC = \frac{360^\circ}{4}$$

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{2}$$

$$AO = \frac{AC}{\sin \frac{180^\circ}{2}} = \frac{5}{\sin \frac{\pi}{2}} - \text{сек. } P_{\max}$$

$$3. S_{\text{кольца}} = S_{\text{круга с } r=0,2} + S_{\text{круга с } r=0,8}$$

$$0,2 = 0,1 - 0,1 = r_2$$

$$0,8 = 0,1 + 0,7 = r_1$$

$$S_{\text{кольца}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) =$$

$$= \pi (200,1)(18) = 36\pi \cdot 0,1 = 36\pi \cdot \frac{AO}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1440\pi}{\cos \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Ответ: } P_{\max} = \frac{40}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$S_{\text{кольца}} = \frac{1440\pi}{\cos \frac{\pi}{2}}$$

Задача 5.

$$* k \in [8; 13]$$

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$x_1 \leq 2x_2$  - вероятность!

$$D = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 + 81 - 54k - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

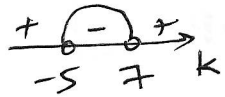
$$\sqrt{D} = 19 - k \text{ (с ут. *)}$$

$$x = \frac{9 - 3k \pm (19 - k)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_1 = \frac{-5 - k}{k^2 - 2k - 35} \quad x_2 = \frac{14 - 2k}{k^2 - 2k - 35}$$

$$1) x_2 \leq 2x_1, \quad \frac{14 - 2k}{k^2 - 2k - 35} \leq \frac{-10 - 2k}{k^2 - 2k - 35}$$

$$\frac{24}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$



$k \in (-5; 7)$ , перес. с \*  $k \in \emptyset$

2)  $x_1 \leq 2x_2$

$$\frac{-5-k}{k^2-2k-35} \leq \frac{28-4k}{k^2-2k-35}$$

$$\frac{33-3k}{k^2-2k-35} \geq 0$$

$$\frac{11-k}{k^2-2k-35} \geq 0$$

$k \in (7; 11]$ , перес. с \*

$$k \in [8; 11]$$

Т.о., корни ур-е уд. усл.  $x_1 \leq 2x_2$  при

$k \in [8; 11]$  и не уд. при  $k \in (11; 13] \Rightarrow$

$\Rightarrow$  вероятность удовл. условию  $= \frac{3}{5}$

Ответ:  $\frac{3}{5}$ .

### Задание 6.

Дано:

кажд. шар кас. как мин. 3 других,  $r$  одинаковой

$$R_{\text{вн. сф.}} = \sqrt{6} + 1$$

Найти:  $r$  (шары впис. в центр вып. из шаров) - ?

Решение:

1. 1 сторона вып. из шаров  $= a = 3d = 6r$

2. центр впис. сф.  $(1; 0; 0)$  -

- (.) перес.  $DO$  (н вып.) и  $MO_1$  ( $MO_1 \perp DB$ , (.)  $M$  - сф.  $DB$ )

3.  $\Delta$  вып-уп  $\Delta$ -ки  $DOB$  и  $DMO_1$  (подобны по 1 уг.)

$$\frac{DB}{DO_1} = \frac{DO}{DM} = \frac{OB}{O_1M} \quad (OB = \frac{a}{\sqrt{3}}; DO = a\sqrt{\frac{2}{3}})$$

$$\frac{a}{R} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2}}$$

$$a = R \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} = (\sqrt{6} + 1) \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 4 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow r = \frac{2 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}$$

