



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

110434

1 1 0 4 3 4

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



## Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СПбПУ

### ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |                 | Подпись |
|--------|---|----|----|---|----|----|---|---|---|----|----------|-----------------|---------|
|        |   |    |    |   |    |    |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью        |         |
| Оценка | 5 | 10 | 15 | 0 | 20 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0  | 65       | шестьдесят пять |         |



Бланк олимпиадной работы

Задача 1  $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$   
стр. 1/2

$$1. \frac{a^{12} + 729^2}{729 a^6} = \frac{a^{12}}{729 a^6} + \frac{729^2}{729 a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$

$$(729 = 81 \cdot 9 = 3^4 \cdot 3^2 = 3^6)$$

2. Запишем ФСУ

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

3. Применим ФСУ

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{a}{3} =$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$$

Бланк олимпиадной работы

4.  $\left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) =$   
 $= 6 \cdot \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 1\right)$

(Задание 1  
продолжение  
стр. 2/2)

5.  $\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 6$  из п. 3

$$\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^2 = 36$$

$$\cancel{\left(\frac{a}{3}\right)^4} + \left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 36$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 + 2 = 36$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 = 34$$

6.  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = 6(34 - 1) = 6 \cdot 33 = 18 \cdot 11 = 198$

Ответ: 198

$$(ab)c = a(bc)$$

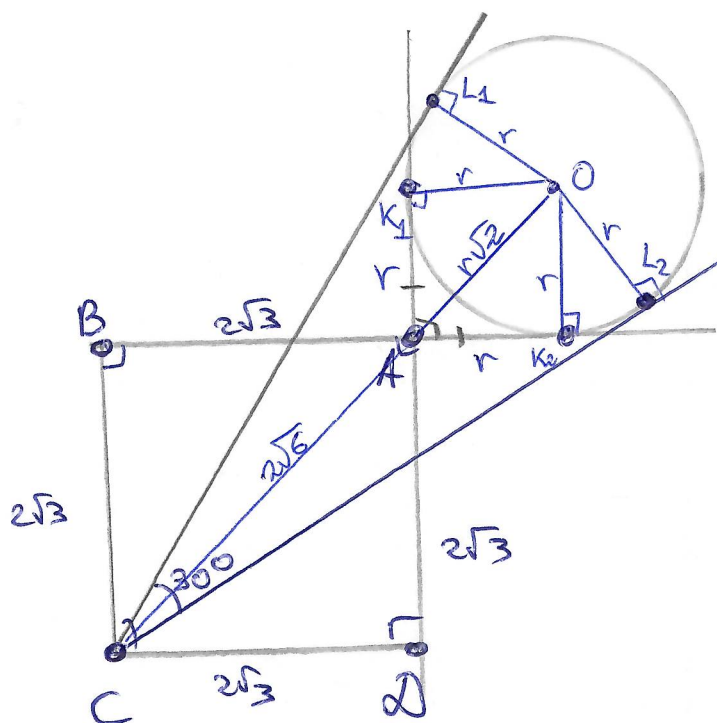
$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 2

стр. 1/2



Найти:  $r$

1. По св-ву касательной

$$OK_1 \perp AK_1; OK_1 = r$$

$$OL_1 \perp CL_1, OL_1 = r$$

$$OK_2 \perp AK_2, OK_2 = r$$

$$OL_2 \perp CL_2; OL_2 = r$$

2. В четырехугольнике  $AK_1OK_2$

$$\angle A = 90^\circ \text{ (верт-угол с углом кв-та)}$$

$$\angle K_1 = \angle K_2 = 90^\circ \text{ (см. п. 1)}$$

$$\angle O = 90^\circ \text{ по сумме углов 4-уг. (выпуклый 4-уг.)}$$

$\Rightarrow AK_1OK_2$  - квадрат

$$AK_1 = AK_2 = r$$

Бланк олимпиадной работы

3.  $AO = r\sqrt{2}$  — диаметр кв-та  $AK_1OK_2$

(Задание 2  
продолжение)  
стр. 2/2

$CA = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$  — // —  $ABCD$   
(из симметрии  $A, C, O$  — на одной прямой)

4.  $\sin 15^\circ = \frac{r}{CA + AO} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{r}{2\sqrt{6} + r\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$  обе части  $\cdot \sqrt{2}$

$\frac{r}{2\sqrt{3} + r} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

$2r = (2\sqrt{3} + r)(\sqrt{3} - 1)$

$2r = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + r \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - r$

$2r + r - r\sqrt{3} = 3 \cdot 2 - 2\sqrt{3}$

$3r - r\sqrt{3} = 2(3 - \sqrt{3})$

$r(3 - \sqrt{3}) = 2(3 - \sqrt{3})$

$r = 2$

Ответ: 2 (см)

Бланк олимпиадной работы

Задача 3 стр. 1/2

$$\begin{cases}
 x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\
 y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\
 z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 22 \\
 22 \\
 \hline
 484 \\
 \times 23 \\
 23 \\
 \hline
 69 \\
 46 \\
 \hline
 529
 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x(23 - 63) + y(-22 + 66) + z(-69 + 23) + 1413 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0$$

$$(x^2 - 40x) + (y^2 + 44y) + (z^2 - 46z) + 1413 = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x + 20^2) - 20^2 + (y^2 + 2 \cdot 22 \cdot y + 22^2) - 22^2 +$$

$$+ (z^2 - 2 \cdot 23 \cdot z + 23^2) - 23^2 + 1413 = 0$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 20^2 - 22^2 - 23^2 + 1413 = 0$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 - 400 - 484 - 529 + 1413 = 0$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0$$

$$\begin{array}{r}
 + 884 \\
 + 529 \\
 \hline
 1413
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 20 \\
 y &= -22 \\
 z &= 23
 \end{aligned}$$

На множестве действительных чисел  $(a)^2 \geq 0 \quad \forall a$

Сумма квадратов равна нулю

тогда и только тогда, когда каждый равен 0



Бланк олимпиадной работы

Проверка

~~400z~~

(Задание 3)  
продолжение  
стр. 2/2

$$\begin{aligned} 20 \cdot 20 - 22(-22) - 69 \cdot 23 + 703 &= 400 + 484 - 3 \cdot 529 + 703 = \\ &= 884 - 1587 + 703 = 1587 - 1587 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -22 \cdot -22 + 23 \cdot 20 + 23 \cdot 23 - 1473 &= \\ &= 484 + 460 + 529 - 1473 = \\ &= 484 + 989 - 1473 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 \cdot 23 - 63 \cdot 20 + 66 \cdot (-22) + 2183 &= \\ &= 529 - 1260 - 1452 + 2183 = \\ &= (2183 - 1452) - (1260 - 529) = \\ &= 731 - 731 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ответ:  $(20; -22; 23)$

$$x = 20$$

$$y = -22$$

$$z = 23$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 5

стр. 1/3

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$D = \underbrace{(3k - 9)^2}_{"b^2"} - 4 \cdot \underbrace{2}_{"c"} \cdot \underbrace{(k^2 - 2k - 35)}_{"a"} =$$

$$= 9k^2 + 81 - 2 \cdot 3k \cdot 9 - 8k^2 + 16k + 280 =$$

$$= k^2(9 - 8) + k(16 - 54) + 81 + 280 =$$

$$= k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2 \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{корни} \\ \text{всегда} \\ \text{есть} \end{array}$$

$$x = \frac{-(3k - 9) \pm \sqrt{D}}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{-(3k - 9) \pm (k - 19)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$k^2 - 2k - 35:$$

разложим на множители

$$D = 4 - 4(-35)(1) = 140 + 4 = 144 = 12^2$$

$$k = \frac{-(-2) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = 1 \pm 6 = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$k^2 - 2k - 35 = (k - 7)(k + 5)$$

Бланк олимпиадной работы

(Задача 5)  
продолжение) стр. 2/3

$$x = \frac{-3k+9 \pm (k-19)}{2(k-7)(k+5)}$$

$$x_1 = \frac{-3k+9+(k-19)}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-2k-10}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-2}{2(k-7)} = \frac{1}{7-k}$$

$$x_2 = \frac{-3k+9-(k-19)}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-4k+28}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-4}{2(k+5)} = \frac{-2}{k+5}$$

(при  $k=19$ ,  $x=0$   $x_1 = \frac{1}{7-19} = \frac{-2}{19+5} = x_2 = -\frac{1}{12}$ )

$$2x_2 \geq x_1$$

$$\frac{-4}{k+5} \geq \frac{1}{7-k}$$

$$k \in (8; 13)$$

$\Downarrow$

$$7-k < 0$$

$$k+5 > 0$$

$$(7-k)(k+5) < 0$$

$$\frac{-4}{k+5} \geq \frac{1}{7-k}$$

1.  $(7-k)(k+5)$   
+  
ошибка!  
знака!

~~$k \in (8; 13)$~~   
 ~~$7-k < 0$~~

# Бланк олимпиадной работы

Задача 5  
продолжение  
стр. 3/3

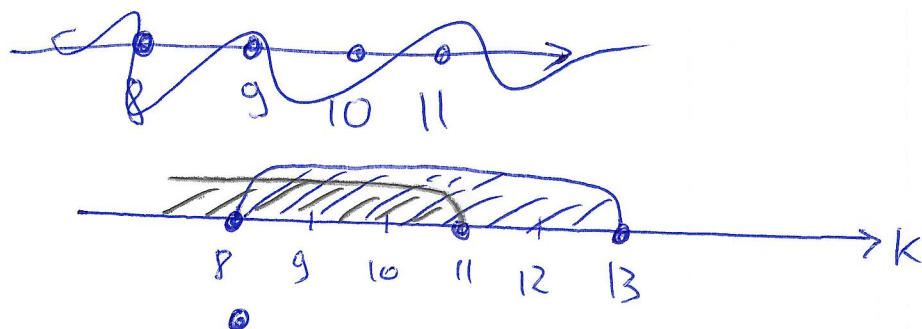
$$-4(7-k) \leq k+5$$

$$-28 + 4k \leq k+5$$

$$4k - k \leq 5 + 28$$

$$3k \leq 33$$

$$k \leq 11$$



Точка может попасть на любую  
позицию отрезка  $[8; 13]$

Устраивают нас только точки с координатой  
меньше 11, в данном отрезке это  $[8; 11]$

При случайном броске все числа равновероятны

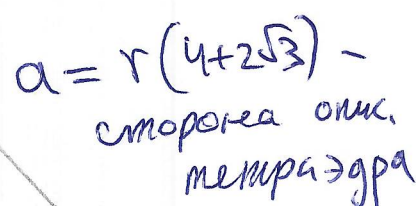
$$\Downarrow$$

$$P = \frac{|11-8|}{|13-8|} = \frac{3}{5} = 60\%$$

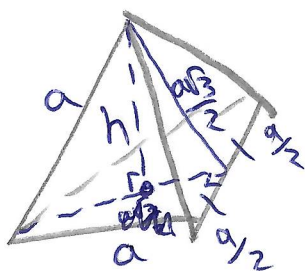
Ответ: 60%



56



темпадр со стороной  $4r$  и вершинами  
радиуса  $r$



$$h = \sqrt{\left(\frac{av_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^2}, \text{ где } m - \text{не квадрат}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)}$$

$$= a \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$$



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

110434

0123456789

Бланк олимпиадной работы

2. Рассмотрим метр  $(0; R)$  - см. рис.



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

110434

0123456789

Бланк олимпиадной работы

53

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

$$CS = \#$$