



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

114985

1123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02

Площадка написания _____

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	13	3	15	0	0	0	0	0	46	сорок шесть	

→ №2 (Продолжение второй задачи).

$$7) \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(2\sqrt{3}+R)}; (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+R) = 2R;$$

$$6 + R\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - R = 2R$$

$$6 - 2\sqrt{3} = 3R - R\sqrt{3}$$

$$6 - 2\sqrt{3} = R(3 - \sqrt{3}) = 2(3 - \sqrt{3})$$

$$R = 2.$$

Ответ: 2.

3) Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим все 3 уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y + 40x - 46z + 1413 = 0$$

$$(x^2 + 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 - 46z + 529) = 1413 - 1413$$

$$(x + 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0.$$

Получается т.т.т. когда $x = -20$; $y = -22$;
 $z = 23$.

Ответ: $(-20, -22, 23)$.

Бланк олимпиадной работы

№1 Найти: $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6}$, если $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$.

Решение: 1) Упростим выражение $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} =$

$$= \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \boxed{\frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6}} - ?$$

2) Возведём в куб: $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^3 = 2^3 \left(\frac{a-b}{3}\right)^3 = 2^3 \left(\frac{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}{27}\right)$.

$$\frac{a^3}{27} - \frac{27}{a^3} - 3 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right) = 8, \text{ но } \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow$$

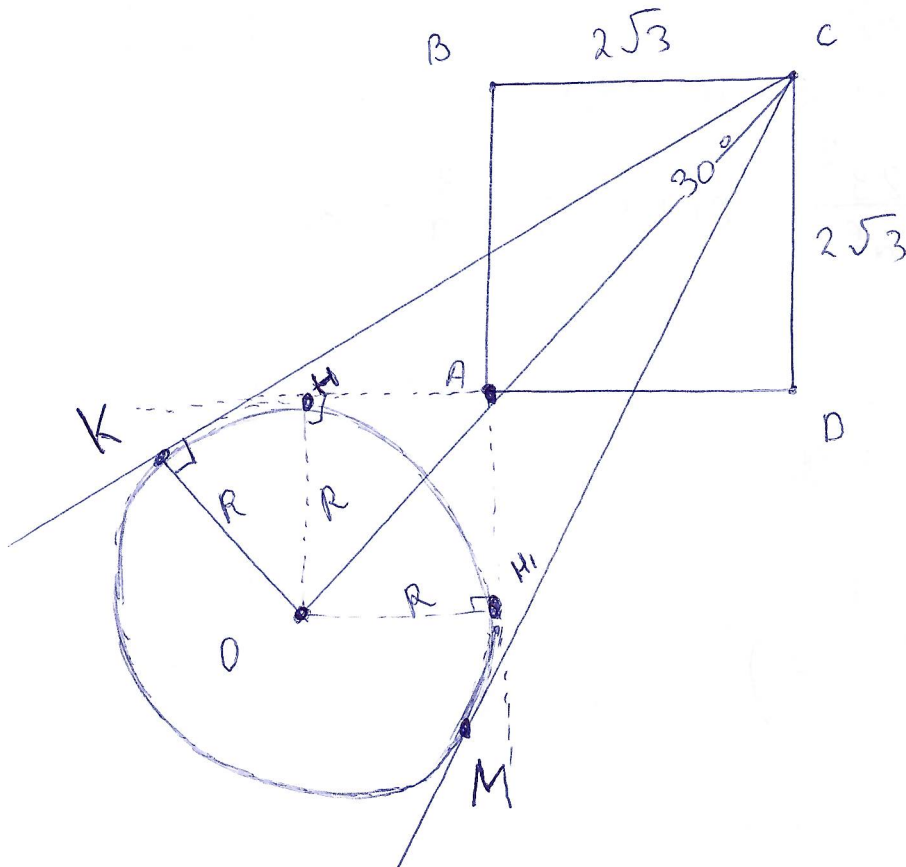
$$\Rightarrow \frac{a^3}{27} - \frac{27}{a^3} = 14. \text{ Возведём в квадрат.}$$

$$\frac{a^6}{729} - 2 + \frac{729}{a^6} = 196 \Rightarrow \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = 198.$$

Ответ: 198.

2) Дано: $ABCD$ - квадрат; $AB = 2\sqrt{3}$; $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $(\cdot) O$ - центр K, M - касат.
 $\angle KCM = 30^\circ$

Найти: R_0 - ?



Решение: 1) Д.п. CO ; OK ; $OK = R$, CK - кас $\Rightarrow \angle OKC = 90^\circ$

2) $\ntriangle KOC$ и $\triangle COM$: (CO - общая; $OK = OM = R$; $KC = CM$ (кас)) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle KOC = \triangle COM$ по трём сторонам. $\Rightarrow \angle KCO = \angle OCM = 15^\circ$

3) $\ntriangle KCO$: $\boxed{\sin 15 = \frac{KO}{CO}}$

4) Д.п. OK , OM - радиусы $K(\cdot)$ кас $\Rightarrow \angle K = \angle M = 90^\circ$; $\angle A = 90^\circ$
 причём $KA = AM$; $OK = OM \Rightarrow OKAM$ - квадрат, со
 стороной $OK = R$. 5) Заметим, что рисунок симметричен
 относительно OC , тогда $A \in OC$. (AC - диагональ).

6) $CO = AC + AO = 2\sqrt{6} + R\sqrt{2}$.

7) из п.4 и п.6: $\sin 15 = \frac{R}{2\sqrt{6} + R\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(2\sqrt{3}+R)}$

см. 1 лист.

Бланк олимпиадной работы

№5) $k \in [8; 13]$, какова вероятность, что корни ур-ия

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0 \text{ угодуют}$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

Решение: 1) $k^2 - 2k - 35 = (k - 7)(k + 5) \geq 0$ при $k \in (-\infty; -5] \cup [7; +\infty)$, т.е. при наших $k \in [8; 13]$ ур-ие всегда квадратное.

$$2) D = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - (8k^2 - 16k - 280) = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3k + 9 \pm (k - 19)}{2(k^2 - 2k - 35)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{оба} \\ \text{корня} \\ \text{реализуются} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-2(k+5)}{2(k-7)(k+5)} = -\frac{1}{k-7} \\ x_2 = \frac{-4(k-7)}{2(k-7)(k+5)} = -\frac{2}{k+5} \end{array} \right.$$

Условие $x_1 \leq 2x_2$:

$$① -\frac{1}{k-7} \leq 2\left(-\frac{2}{k+5}\right)$$

$$\frac{1}{k-7} \geq 2\left(\frac{2}{k+5}\right)$$

$$k+5 \geq 4k-28$$

$$33 \geq k \Rightarrow \boxed{k \leq 11}$$

$$② -\frac{2}{k+5} \leq 2\left(-\frac{1}{k-7}\right)$$

$$\frac{1}{k+5} \geq \frac{1}{k-7}; \Rightarrow \text{не выполняется}$$

Условие $x_1 \leq 2x_2$ выполн. $k \leq 11$, но $k \in [8; 13]$,

T.e.  , Торга

вероятность $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ombem: $\frac{2}{3}$

④ (ο) Ρ-ηλεκτροφιλ.

Решение:

По условию задачи

"молчаливо предполагается",

что ширина
покрытие радарами

Кольца - это диаметр окружности с радиусом

Если все это кольцо произвеса $PB = g_1$, то $S = g_1^2 \tilde{\Pi}_1 (R = g_1)$

Если все покрытие правильной семиугольником, то

$S = 6 \cdot 123 \sqrt{91} \cdot (R = 50)$. Und $R = pc = \underline{50} \Rightarrow \underline{S = 50^2 \pi}$

