



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

102973

0123456789

Бланк олимпиадной работы

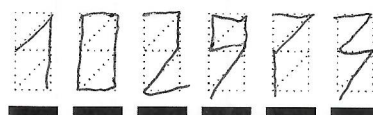
Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СПбПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	3	10	15	5	20	0	0	0	0	0	53	пятьдесят три	



Бланк олимпиадной работы

1. $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \quad ; \quad \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

$$\frac{a^{12} + 3^{12}}{(3a)^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6}$$

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^6 = \frac{a^6}{3^6} - 6\frac{a^4}{3^4} + 15\frac{a^2}{3^2} - 20 + 15\frac{3^2}{a^2} - 6\frac{3^4}{a^4} + \frac{3^6}{a^6} = 64$$

$$\frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} - 6\left(\frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4}\right) + 15\left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) = 44$$

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} - 2 = 4$$

$$\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} = 6$$

$$\left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right)^2 = \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} + 2 = 36 \quad \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} = 34$$

$$\frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = 44 + 6 \cdot 34 - 15 \cdot 6 = 44 + 6 \cdot 19 = 44 + 114 = 158$$

Ответ: 158

3.
$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 & (1) \\ y^2 + 23x + 23y - 473 = 0 & (2) \\ z^2 - 63x + 68y + 2183 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) + (3) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 569 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

$$\boxed{x=20; y=-22; z=23}$$

Сумма квадратов всегда ≥ 0 и $= 0$ только, когда каждый квадрат равен нулю



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

1 0 2 9 7 3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

$$5. (k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0 ; k \in [8; 13]$$

$$x_1 = \frac{-3k + 9 - (k - 19)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$D = 9k^2 - 5k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

$$x_2 = \frac{-3k + 9 + (k - 19)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$2k^2 - 2k - 35 = 0$$

$$(k + 5)(k - 7) = 0$$

$$k \geq 8 \Rightarrow k^2 - 2k - 35 > 0$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$\frac{-2k - 10}{k^2 - 2k - 35} \geq \frac{-4k + 28}{2(k^2 - 2k - 35)} \quad (k^2 - 2k - 35 > 0)$$

$$-2k - 10 \geq \frac{-4k + 28}{2}$$

$$-2k - 10 \geq -2k + 14$$

$$-10 \geq 14 \quad \text{— неверно}$$

$$x_2 \leq 2x_1$$

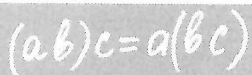
$$\frac{-2k - 10}{2(k^2 - 2k - 35)} \leq \frac{-4k + 28}{k^2 - 2k - 35} \quad (k^2 - 2k - 35 > 0)$$

$$-k - 5 \leq -4k + 28$$

$$3k \leq 33$$

$$k \leq 11$$

Чтобы посчитать вероятность
разделить промежуток $[8; 13]$ на 5
равных: $(8; 9)$ $(9; 10)$ $(10; 11)$ $(11; 12)$ $(12; 13)$
Для удобства, надо считать, что Лист 3 из 5
появляется и входит только в $[10; 11]$ и не
входит в $(11; 12)$.



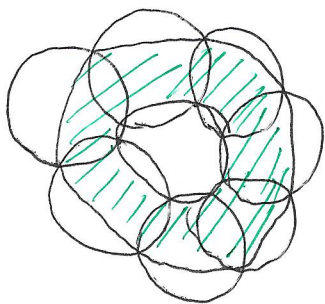
$E = mc^2$



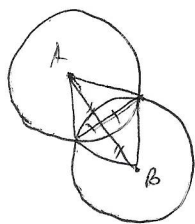
Бланк олимпиадной работы

Тогда нам подходит
данное условие $\frac{3}{5}$
3 промечутка из 5 $\Rightarrow$ вероятность выполнения
Ответ: $\frac{3}{5}$

4. Построим рисунок на основе условия:



Зеленая штриховка - кольцо.
7 окружностей - границы кругов покрытия
радаров.

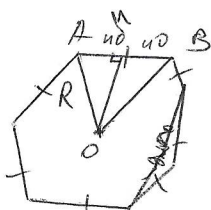


Это - 2 круга покрытия радаров, в т. А и В - радары.
Зная радиусы кругов и расстояние между точками
пересечения окружностей, найдем расстояние между
радарам

по т. Пифагора $41^2 = 9^2 + x^2$

$x = 40$

Построим схему:



Это - правильный 7-угольник
О - платформа (центр)

$\angle OAB = \frac{180 - 5}{7 - 2} =$

$\cos(\angle OAB) = \frac{40}{R}$

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{3200}{R^2}$



$(ab)c = a(bc)$

$E = mc^2$



Бланк олимпиадной работы

по т. кос $6400 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{3200 - R^2}{R^2} = 4R^2 - 6400$

$R^2 = 3200$

$R = 40\sqrt{2}$

в тр. OAH $\angle AHO = 90^\circ$

$\angle OAH = 45^\circ \Rightarrow OH = AH = r$

$\cos \beta = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45^\circ$

$AH = r$

$r - g =$ малая ширина кольца

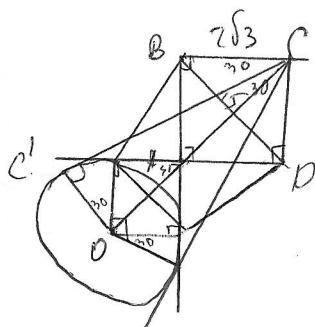
$r + g =$ большая ширина кольца

$S_k = 2\pi (49^2 - 31^2) = 2\pi (18 \cdot 80) = 2\pi 2880$

Ответ: $S_k = 2880\pi \text{ км}^2$

так расстояние $= 40\sqrt{2} \text{ км}$

2.



$AE = 2\sqrt{6}$

$3a$ - сторона малого квадрата

$a\sqrt{2}$ - его диагональ

$(a\sqrt{2} + 2\sqrt{6})^2 = (a + 2\sqrt{3})^2 + (a + 2\sqrt{3})^2$

$2a^2 + 4a\sqrt{2} + 24 = (a^2 + 4a\sqrt{3} + 12)$

впр. тр. же $OC'C$

$\angle C' = 90^\circ$

$\frac{C'O}{OC} = \sin \angle C = \sin 15^\circ$

$\frac{a}{a\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$2a\sqrt{2} = (\sqrt{3} - 1)(a\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$

$2a\sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot 3 - a\sqrt{2} + 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6}$

$3a\sqrt{2} = a\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

$a(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 2(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \Rightarrow a = 2$ Ответ: 2.