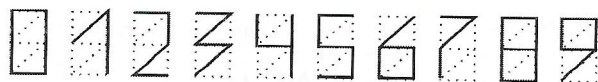
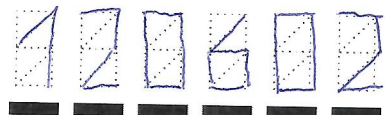




ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СТПСТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	10	20	0	0	0	0	0	60	шестьдесят	

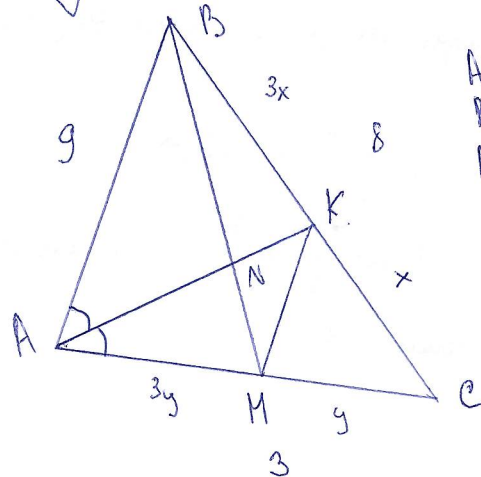
Задача № 1

$$\left(\frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 4090508 + \sqrt{4092529} = \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} \right) \cdot 2022 \cdot 2023 + \sqrt{4092529} =$$

$$= \frac{(2022 - 2023) \cdot 2022 \cdot 2023}{2022 \cdot 2023} + \sqrt{2022 \cdot 2023 + 2023} = -1 + \sqrt{2023^2} = -1 + 2023 = 2022$$

Ответ: 2022

Задача № 2



Дано:
AB=9; AC=3;
BC=8
AM:MC=3:1
Найти:
KN-?

Решение:

- I По основному св-ву биссектрисы: $BK:KC = AB:AC \Rightarrow BK = 3x; KC = x$ ($BK+KC=8 \Rightarrow BK=6; KC=2$)
- II По условию: $AM:MC = 3:1 \Rightarrow AM = 3y; MC = y$
- III $\triangle KMC \sim \triangle BAC$ (по углу и 2 сторонам); $k = \frac{x}{3x+x} = \frac{1}{4} \Rightarrow AB:KM = 4:1$
- IV Треугольники подобны $\Rightarrow$ углы при AB и KM равны $\Rightarrow$ прямые AB и KM параллельны $\Rightarrow$ ABKM-трапеция
- V Диагонали в трапеции точкой пересечения делятся в том же отношении, что и основания $\Rightarrow AN:KN = 4:1$
- VI По теореме о длине биссектрисы:
 $AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot KC} \Rightarrow \sqrt{9 \cdot 3 - 6 \cdot 2} \Rightarrow AK = \sqrt{15} \Rightarrow$
 $4a + a = \sqrt{15} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow KN = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$

Лист 1 из 4

Задача №3.

Если вероятность того, что пробка темная - $\frac{2}{11}$, значит среди всех пробок $\frac{2}{11}$ часть - темные $\Rightarrow$ кол-во пробок делится на 11. Аналогично с легкой мажоритарной $\frac{4}{13} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ общее число пробок делится на 13. Единственное число от 1 до 150, делящееся и на 11, и на 13 - 143 $\Rightarrow$ всего 143 пробки. (т.к. пробка - число чётное)

Среди них $\frac{2}{11}$ - темные $\Rightarrow \frac{9}{11}$ - лёгкие, т.е. лёгких: $143 \cdot \frac{9}{11} = 13 \cdot 9 = 117$

Если среди темной пробки нет мажоритарной, то все мажоритарная - лёгкая, а все темная - мажоритарная. (т.е. $\frac{2 \cdot 143}{11} = 26$), то есть всего мажоритарной $\frac{4 \cdot 13}{13} = 47$, то есть темная-мажоритарной $(143 - 47 = 96)$.

Можно посчитать иначе:

③ 47	④ 40	лёгкая
0	② 26	темная
мажоритарная	высокосерийная	

1) мы выясним, что все мажоритарная - лёгкая, то есть мажоритарной темной не существует. (0)

2) $\frac{2}{11}$ - темные $\Rightarrow \frac{2}{11} \cdot 143 = 26$ темных - все высокосерийные

3) $\frac{4}{13}$ - лёгкая мажоритарная $\Rightarrow \frac{4}{13} \cdot 143 = 4 \cdot 11 = 44$ - лёгкая мажоритарная

4) Все таблица - 143 $\Rightarrow$ оставшаяся клетка: 143 - 44 - 26 = 40

5) То есть всего 40 + 26 высокосерийных пробок

Задача №4

Ответ: 66

$$\frac{2023}{2022} > 1 \Rightarrow \text{пробки } \left(\frac{2023}{2022}\right)^x > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{96} \Leftrightarrow x > 96.$$

Пусть у нас есть некая прогрессия, найдём её сумму для: найдём сумму следующей прогрессии:

$$a + ba + b^2a + b^3a + \dots + b^na \Rightarrow a(b^0 + b^1 + b^2 + \dots + b^n)$$

Заметим, что $b^0 + b^1 + \dots + b^n = b^{n+1} - 1$ (Рассмотрим систему счисления с основанием $(b+1)$, переводим данную сумму в неё, получим число вида: $\overline{b b b b}_n \Rightarrow$ следующее за ним число: $\overline{b b b b b}_{n+1}$

$$= b^{n+1}_{10}, \text{ то есть } \overline{b b \dots b b}_{b+1} = b^{n+1}_{10}$$

Таким образом:

$$36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n > 96 \Leftrightarrow 36 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right) > 96 \Leftrightarrow 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 132 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 132/36 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \geq \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^n} \geq 11 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 11 \cdot 3^n \Leftrightarrow \frac{2^n}{3^n} \geq 5,5 - \text{не может}$$

$$\text{быть, т.к. } \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1^n \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1$$

Ответ: не таких n.

Задача №5

корень $\sqrt{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} \geq 0$. Корень четной степени не может быть меньше 0 $\Rightarrow$ единствен. или возможный вариант: $\sqrt{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

Бланк олимпиадной работы

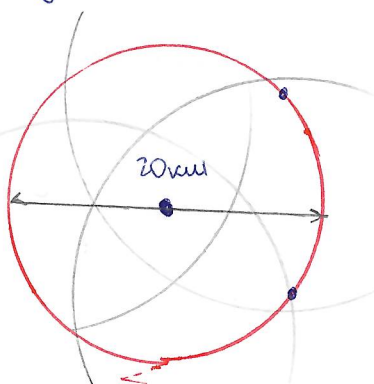
$$\begin{aligned}
 & x \neq 0 \\
 & \Leftrightarrow x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^6 - 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^6 + 1) - 2(x^4 - 2x^3 + x^2) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (x^6 + 1) - 2x^2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1) = 2x^2(x-1)^2 \\
 & \Leftrightarrow x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = a \quad a^3 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (a-1)(a^2 + a - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = 1 \\ \frac{2x^2 + 2}{x} = -1 + \sqrt{17} \Leftrightarrow \\ \frac{2x^2 + 1}{x} = -1 - \sqrt{17} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + (-1 + \sqrt{17})x + 1 = 0 \\ 2x^2 + (1 + \sqrt{17})x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{17}}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{17}}}{4} \right\}$

Задача № 6

Ставим радары на границе необходимого 20-километрового кольца, зона полностью покрывается как показано на рисунке. Площадь: $\pi R^2 = 3,14 \cdot 10^2 \approx 314 \text{ км}^2$

Ответ: $\approx 314 \text{ км}^2$



Задача N 5. Прогоним.

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad (2 < 0) \quad ?! \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ \frac{2x^2 + 2}{x} = -1 \pm \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{17})x + 2 = 0 \\ 2x^2 + (1 + \sqrt{17})x + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Умнож: 120602

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} \\ x &= \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{17})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} \end{aligned} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{17}}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{17}}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{17}}}{4} \quad ?! (1 - \sqrt{17} < 0) \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17} \pm \sqrt{1 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{17}} (\sqrt{1 + \sqrt{17}} \pm \sqrt{2})}{4}$$

$$\text{Отв: } \left\{ \frac{\sqrt{1 + \sqrt{17}} (\sqrt{1 + \sqrt{17}} + \sqrt{2})}{4} \right\}$$

Задача N 4. Прогоним.

Таким образом:

$$36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 36 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + 36 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 36 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$36 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right) > 96 \Leftrightarrow \frac{36 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+1}} > 132 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} > \frac{132}{36} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} > \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{3^n} > 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^n}{3^n} > 5.5 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n > 5.5 \text{ — не имеет смысла, т.к.}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 \Rightarrow \text{таких } n \text{ не существует.}$$

Отв: таких n не существует