



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

110000

0123456789

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания СПбПУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

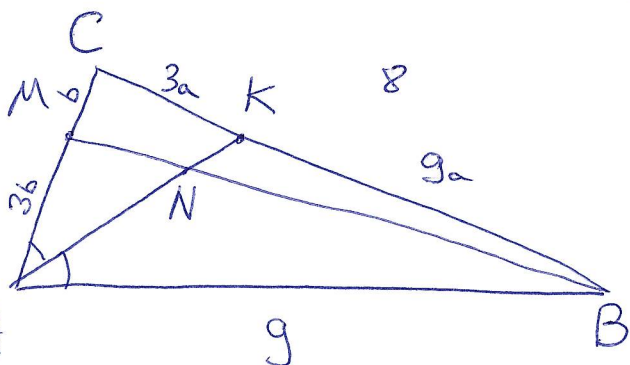
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	10	20	20	18	0	0	0	0	83	восемьдесят три	

$$\begin{aligned} & 1) \left(\frac{10001}{20232023} - \frac{10001}{20222022} \right) \cdot 4090506 + \sqrt{4092529} = \\ & = \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} \right) \cdot 2022 \cdot 2023 + \sqrt{2023^2} = \\ & = 2022 - 2023 + 2023 = 2022 \end{aligned}$$

Ответ: 2022

2)

Дано: $AB=9$; $BC=8$; $AC=3$; AK — бисс.;
 $M \in AC$, $AM:CM=3:1$; KN — ?



Реш-е:

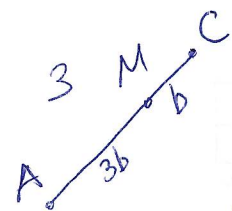
По основному св-ву биссектрисы для $\triangle ABC$ и AK получаем, что

$$CK:BK = AC:AB.$$

Пусть $CK=3a$, тогда $BK=9a$.

Т.к. $BC=8$, то $CK+BK=8 \Rightarrow 3a+9a=8 \Rightarrow$

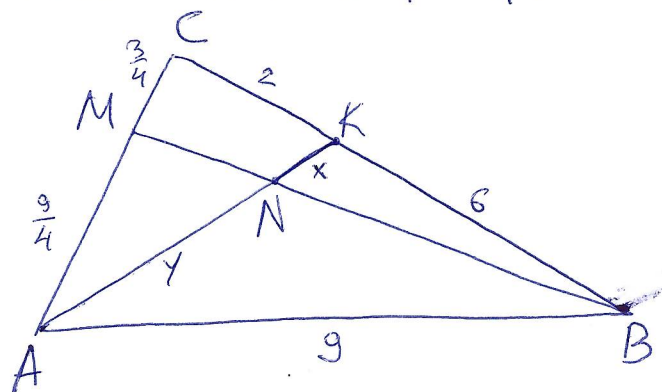
$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow CK = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2; BK = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6.$$



Рассмотрим отрезок AC и точку M на нём. По условию $AM:MC=3:1$.

Если обозначить длину AM за $3b$, то длина MC равна b .

Т.к. $AC=3$, то $AM+MC=3$, значит $3b+b=3$, т.е. $b=\frac{3}{4}$.
Тогда $AM=3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, а $MC=b=\frac{3}{4}$.



Обозначим $NK=x$, $AN=y$.
Запишем т. Чева для $\triangle ABC$ и прямой AKN .

$$\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NK} \cdot \frac{KB}{BC} = 1, \text{ т.е.}$$

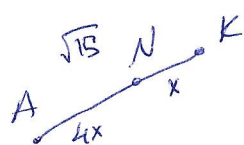
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{4}{6} = 1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4}, \text{ т.е. } y = 4x$$

Вычислим длину AK по ф-ле нахождения длины биссектрисы треугольника:

$$AK = \sqrt{AC \cdot AB - CK \cdot KB} = \sqrt{3 \cdot 9 - 2 \cdot 4} = \sqrt{27 - 8} = \sqrt{19}$$

$$AK = \sqrt{19} \Rightarrow 4x + x = \sqrt{19} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{19}}{5} = \sqrt{\frac{19}{25}}$$



Ответ: $NK = \sqrt{\frac{19}{25}}$

4 $\left(\frac{2023}{2022}\right)^{36+24+\dots+36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{96}$

$$36 + 24 + \dots + 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n > 96$$

$$36 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 96 \quad | :12$$

$$3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) > 8$$

$$1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{8}{3}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

4) (продолжение)

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{5}{3}$$

↑

сумма первых n членов геом. прогр. $b_1 = \frac{2}{3}, q = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$4) \left(\frac{2023}{2022}\right)^{36+24+\dots+36\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} > \left(\frac{2023}{2022}\right)^{96}$$

Нер-во

вида $a^x > a^y$, где $a > 1$, $x > 0$ и $y > 0 \Rightarrow$ можем сказать, что $x > y$ — нер-во, которое нужно решить.

$$36 + 24 + \dots + 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n > 96$$

нужно найти наим. натур. реш-е. Переберём n :

1) $n = 1$

$$36 + 36 \cdot \frac{2}{3} = 60 < 96$$

2) $n = 2$

$$36 + 36 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{4}{9} = 60 + 16 = 76 < 96$$

3) $n = 3$

$$36 + 36 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{4}{9} + 36 \cdot \frac{8}{27} = 76 + 16 \cdot \frac{2}{3} = 76 + \frac{32}{3} = 76 + 10\frac{2}{3} = 86\frac{2}{3} < 96$$

4) $n = 4$

$$36 + \dots + 36 \cdot \frac{8}{27} + 36 \cdot \frac{16}{81} = 86\frac{2}{3} + \frac{32}{3} \cdot \frac{2}{3} = 86\frac{2}{3} + \frac{64}{9} = 86\frac{2}{3} + 7\frac{1}{9} = 93\frac{7}{9} < 96$$

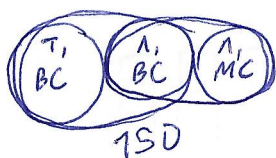
5) $n = 5$

$$36 + \dots + 36 \cdot \frac{16}{81} + 36 \cdot \frac{32}{243} = 93\frac{7}{9} + \frac{64}{9} \cdot \frac{2}{3} = 93\frac{7}{9} + \frac{128}{27} = 93\frac{7}{9} + 4\frac{20}{27} =$$

$$= 97 + \frac{21+20}{27} = 98\frac{14}{27} > 96.$$

Ответ: наим. натур. реш-е — $n = 5$.

3



Т - тяжелые
Л - легкие
МС - ~~малосернистые~~ малосернистые
ВС - высокосернистые

$N_{\text{вс}} = ?$ шифр - 110088

$$P_T = \frac{2}{11}$$

$$P_{\text{Л,МС}} = \frac{7}{13}$$

т.к. малосернистые дают только легкие, то

$$P_{\text{ВС}} = 1 - P_{\text{МС}} = 1 - P_{\text{Л,МС}} = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$$

верно, т.к. ~~малосернистые~~ дают только легкие

т.к. $N_{\text{обз}} \cdot P = N$, то

$$N_{\text{ВС}} = N_0 \cdot P_{\text{ВС}} = 150 \cdot \frac{6}{13} = 61 \frac{7}{13} \approx 62 \quad (\text{т.к. число проб - целое})$$

Ответ: 62 пробы

5 $\sqrt[2022]{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} \leq 0$

т.к. 2022 - четное число, $\sqrt[2022]{a} \geq 0$ (при $a \geq 0$). Но для подкоренного выражения должно быть неотрицательным.

А ещё при $a \geq 0$ $\sqrt[2022]{a} \geq 0$, т.е. если система ~~нерав~~н

$$\begin{cases} \sqrt[2022]{x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4} \leq 0 \\ x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4 = 0$$

$$x^3 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + 4 = 0$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 2(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1) - 2(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})((x + \frac{1}{x})^2 - 3) - 2(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$$

Сделаем замену $t = x + \frac{1}{x}$

$$t \cdot (t^2 - 3) - 2t + 4 = 0$$

$$t^3 - 3t - 2t + 4 = 0$$

$$t^3 - 5t + 4 = 0$$

$$(t - 1)(t^2 + t - 4) = 0$$

$$(t - 1)(t - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2})(t - \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} D = 17 \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Бланк олимпиадной работы

5) (продолжение)

1) $t = 1$

$x + \frac{1}{x} = 1 \quad (x \neq 0)$

$x^2 - x + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3 < 0$

∅

2) $t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad | x \neq 0, \cdot x$

$x^2 + x \cdot \frac{1 - \sqrt{17}}{2} + 1 = 0$

$D = \frac{(1 - \sqrt{17})^2}{4} - 4 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} - 4 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < 0$

$x = \frac{\frac{\sqrt{17}-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{4} \pm \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$

3) $t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

$x + \frac{1}{x} = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad | x \neq 0, \cdot x$

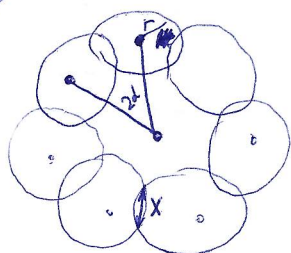
$x^2 + \frac{1 + \sqrt{17}}{2} x + 1 = 0$

$D = \frac{(1 + \sqrt{17})^2}{4} - 4 = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} - 4 = \frac{2 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 0$

$x = \frac{-\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}}$

Ответ: $x = -\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}}$

6)



$r = 26 \text{ км}$

$X = 20 \text{ км}$

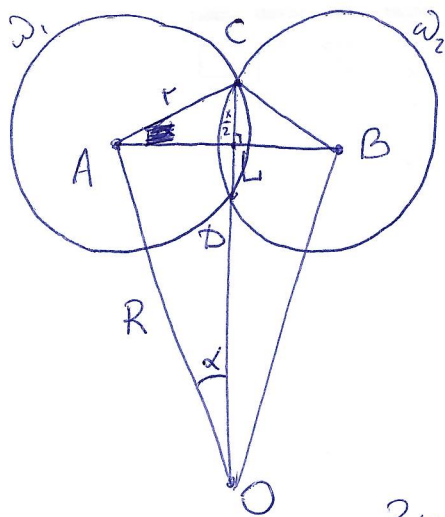
Очевидно, что радары должны быть расположены симметрично относительно матрицы.

Обозначим угол между соседними радарными за 2α . Тогда, т.к. их 7, то

$2\alpha \cdot 7 = 2\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{7}$

Рассмотрим два радара, и одна из них, широта - 110008
 они покрывают (ω_1, ω_2)
 $A \cup B$



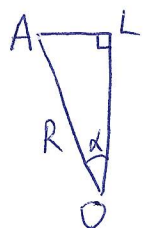
Обозначим точки, как показано на рисунке.

Т.к. картинка симметрична отн. рад. отн ω_1 и ω_2 , то $AB \perp OC$. Так же C и D симметричны относительно AB (т.к. AB - ~~перпендикуляр~~ перпендикуляр, соединяющий центры ω_1 и ω_2).

Значит, L делит CD пополам $\Rightarrow CL = LD = \frac{x}{2}$

По т. Пифагора $\triangle ACL$

$$AL^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow AL = \sqrt{26^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = \sqrt{(2 \cdot 13)^2 - (2 \cdot 5)^2} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (км)}$$



$$R = \frac{AL}{\sin \alpha} \leftarrow \text{искомое расстояние}$$

$$R = \frac{24 \text{ км}}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

~~$$\triangle ACL \sim \triangle OAL \Rightarrow \angle CAL = \angle AOL = \alpha$$~~

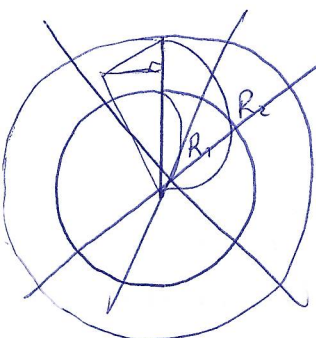
~~$$\sin \alpha = \frac{CL}{AC} = \frac{\frac{x}{2}}{r} = \frac{10 \text{ км}}{26 \text{ км}} = \frac{5}{13}$$~~

~~$$\text{Значит, } R = \frac{24 \text{ км}}{5/13} = \frac{24 \cdot 13}{5} \text{ км} = \frac{312}{5} \text{ км} = 62,4 \text{ км}$$~~

~~Вывод~~

~~Площадь кольца не покрыта~~

~~$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi (R_2^2 - R_1^2)$$~~



~~$$R_1 + \frac{x}{2} = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{62,4^2 - 24^2}$$~~

$\uparrow$
 т. Пифагора для $\triangle OAL$

$$\pi (R_2 - R_1)(R_2 + R_1)$$

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi (R_2^2 - R_1^2) = \pi (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) = \pi x \cdot 2 \cdot OL \quad \textcircled{=}$$

$$OL = AL \cdot \tan \alpha = AL \cdot \tan \frac{\pi}{7}$$

$$\textcircled{=} 2\pi \cdot 20 \text{ км} \cdot 24 \text{ км} \cdot \tan \frac{\pi}{7} = 960 \text{ км} \cdot \pi \cdot \tan \frac{\pi}{7}$$

