



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



ШИФР

1 0 7 0 8 6

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания _____

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	15	10	10	8	—	—	—	—	48	сорок восемь	



Бланк олимпиадной работы

№ 1

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = ? \quad \frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} - 2^{12}}{2^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{2^6} - \frac{2^6}{a^6} = ?$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2^2} - \frac{2^2}{a^2} = 3$$

Пусть $x = \frac{a^2}{2^2}$, $x \neq 0$. Тогда: $x - \frac{1}{x} = 3$.

А искомое значение принимает вид:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = ?$$

Возведем уравнение $x - \frac{1}{x} = 3$ в 3-ю степень:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow \text{(по формуле куба разности)}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 27 \Rightarrow x^3 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = 27$$

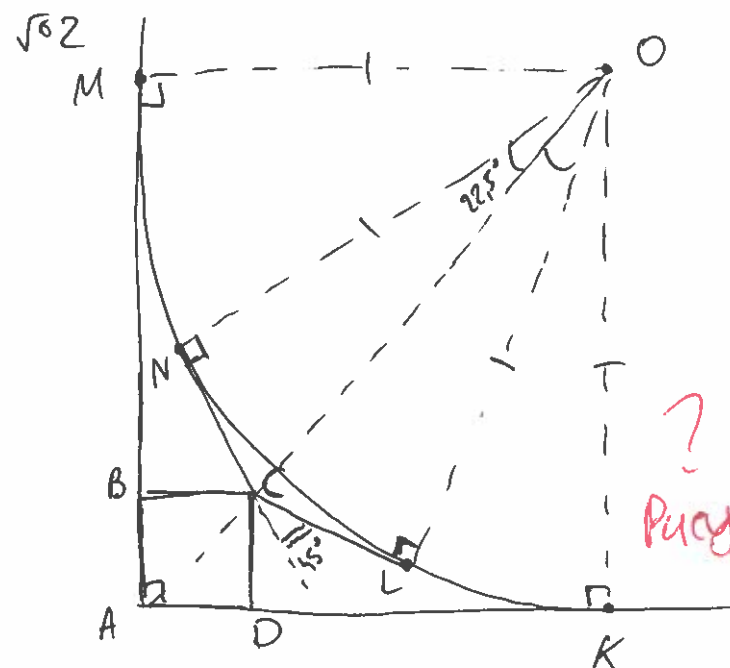
$$\text{По условию } x - \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^3 - 9 - \frac{1}{x^3} = 27 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 36$$

Т.к. после замены искомое значение равно $x^3 - \frac{1}{x^3}$, то ответ: 36.

55

Ответ: 36.

Бланк олимпиадной работы



Дано:

ABCD - квадрат

AM и AK - касательные

к окруж. с центром O.

$$AM = AK = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

CN и CL - касат. к окруж.

$$\angle CNL = 45^\circ$$

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Решение:

Касетн: АВ - ?

т.к. $OM = OK = R$ окружн и $\angle MOK = \angle OKA = \angle KAM = \angle AMO = 90^\circ$,
то OMAK - квадрат.

ON также равно OL, радиус OM и OK равно радиусу окружн.
 $\angle ONC = \angle OLC = 90^\circ$ (касательная и радиус).

$$\angle CNL = 45^\circ \Rightarrow \angle NCL = 180 - 45 = 135^\circ \text{ (тупой угол)}.$$

$$\text{По условию } AK = AM = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow R = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Проведем OA - диагональ квадрата AMOK. $C \in AO$ (т.к. AC - диагональ
внутреннего квадрата в квадрате AMOK с общим углом A).



Бланк олимпиадной работы

Рассмотрим $\triangle NOC$: $\angle ONC = 90^\circ$ (касательная и радиус)?

$$\angle NCO = \angle LCO = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ (в силу симметрии)}$$

Точки N и L относительно диагонали AO). $\Rightarrow$

$$\angle NOC = 180^\circ - 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

Найдем косинус этого угла из условия, данного в условии:

$$\cos d = \sqrt{1 - \sin^2 d} \Rightarrow \cos 22,5^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 22,5^\circ} \Rightarrow$$

$$\cos 22,5^\circ = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{в } \triangle NOC : \frac{NO}{CO} = \cos \angle NOC = \cos 22,5^\circ \Rightarrow$$

$$CO = \frac{NO}{\cos 22,5^\circ} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \cdot 2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad \text{можно заменить на сокращение}$$

$$CO = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) 2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4 - 2}} = (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Диагональ квадрата $AMOK$ равна $AK \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$

$$AO = \sqrt{2} (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$$

$$\begin{aligned} AC &= AO - CO = 2 + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})} - (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \\ &= (2 + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}) (1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}) = (2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}) (1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \end{aligned}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$AC = 2 - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2}(2-\sqrt{2})$$

$$AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}) + \sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}} - (2-\sqrt{2}))}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}) + \sqrt{2-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}) =$$

$$= (1-\sqrt{2-\sqrt{2}})(\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}})$$

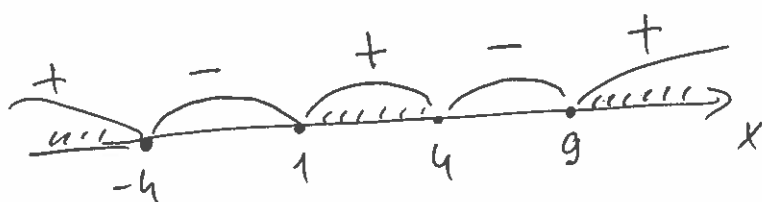
Ответ: $(1-\sqrt{2-\sqrt{2}})(\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}})$

№3

$$5x - x^2 + \sqrt{(16-x^2)(-x^2+10x-9)} = 9$$

Ограничения: $(16-x^2)(-x^2+10x-9) \geq 0$

$$(4-x)(4+x)(9-x)(x-1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty).$$

$$\sqrt{(16-x^2)(-x^2+10x-9)} = x^2 - 5x + 9 \quad | \cdot 2$$

$$(16-x^2)(-x^2+10x-9) = (x^2-5x+9)^2 \Rightarrow$$

$$-16x^2 + 160x - 144 + x^4 - 10x^3 + 9x^2 =$$

$$= x^4 + 25x^2 + 81 - 10x^3 + 18x^2 - 90x$$

$$-7x^2 + 160x - 144 = 43x^2 - 90x + 81 \Rightarrow$$

$$50x^2 - 250x + 225 = 0$$

возведем в квадрат.

т.к. дискриминант
правой части уравнения
отрицательной, то верна
только левая

$$D = 25 - 36 < 0.$$



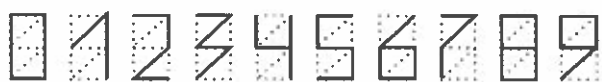
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$50x^2 - 250x + 225 = 0 \quad | :25$$

$$2x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 2 \cdot 9}}{4} \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} = 2,5 + \frac{\sqrt{7}}{2} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} = 2,5 - \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Проверим, подходит ли корень под ограничения:

$$x_1 = 2,5 + \frac{\sqrt{7}}{2} \quad 2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow 1 < \frac{\sqrt{7}}{2} < 1,5 \Rightarrow$$

$$\cancel{2,5+1} < x_1 < 2,5+1,5 \Rightarrow x_1 \in [1; 4] \text{ притетуголу} \Rightarrow x_1 - \text{подходит.}$$

Проверим корень x_2 :

$$x_2 = 2,5 - \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow 2,5 - 1,5 < x_2 < 2,5 - 1 \Rightarrow 1 < x_2 < 1,5 \Rightarrow$$

x_2 подходит.

Ответ: корни: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$

150.
✓

Бланк олимпиадной работы

5.4

Радар. 8. Радиус покрытия одного $r = 15 \text{ км}$.

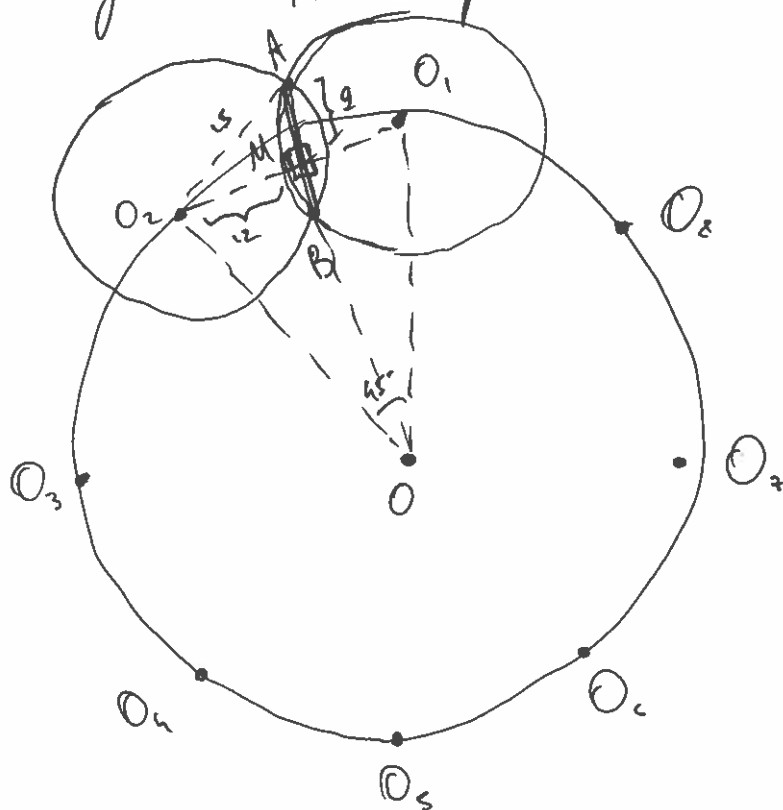
Нужно чтобы он покрывал канал шириной $l = 18 \text{ км}$.

макс. расстояние от материка - ?

Решение задачи. Т.к. радаров 8, то

для покрытия канала максимальной ширины при минимальном расст. от берега R , радары

нужно расположить в вершинах правильного восьмиугольника. Начертим:



На чертеже

O - материк

$O_1 \dots O_8$ - радары.

$\angle O_1 O O_2 = 45^\circ \left(\frac{360}{8} \right)$

Бланк олимпиадной работы

Тогда нам необходимо найти макс. $OO_1 = R \sin \alpha$.

Рассмотрим без огр. общности 2 радара O_1 и O_2 :

AB (точка пересечения) — ширина полосы, равная 18.

$r_1 = r_2 = r = 15$ $\angle O_2 O O_1 = 45^\circ$. Найдем минимальное возможное OO_1 .

$O_2 O_1$ — серединный перпендикуляр к AB . (для удобства считаем, что эта прямая содержит радиус).

Высот $OO_1 \perp AB = M$. Т.к. $O_1 M = O_2 M$ (в силу симметрии),

то т.к. треугольник $O_1 O O_2$ равнобедренный ($OO_1 = OO_2$), OM — высота, биссектриса и медиана в нем.

Рассмотрим $\triangle AO_2 M$: $O_2 A = R = 15$ $AM = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$.

$$O_2 M = \sqrt{O_2 A^2 - AM^2} = \sqrt{225 - 81} = 12 \Rightarrow$$

$$OO_1 = 2 \cdot O_2 M = 24.$$

Верный ход
решения! Верно
найденно OO_1 !
Далее неверно!

Из $\triangle OO_2 O_1$ по теореме косинусов найдем

$$R = O_2 O = O_1 O \Rightarrow O_2 O_1^2 = OO_2^2 + OO_1^2 - 2OO_2 \cdot OO_1 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow 24^2 = 2R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow R^2 = \frac{24^2}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{24}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \quad \text{Ответ: } \frac{24}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$



Бланк олимпиадной работы

№5

$k \in [5; 7]$ Найти верность, что корни

$$(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$$

удовлетворяют: $x_1 \leq 2x_2$?

* Для квадратного уравнения вида:

$ax^2 + bx + c = 0$ корни равны:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

$\Rightarrow$ т.к. $x_1 \leq 2x_2$, то $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \leq \frac{-b + \sqrt{D}}{a}$ для данного уравнения.

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = (3k - 7)^2 - 8(k^2 - 3k - 4) =$$

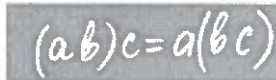
$$= \underline{9k^2 - 42k + 49} - \underline{8k^2 + 24k + 32} =$$

$$= k^2 + 12k + 81 = (k + 9)^2$$

Подставим значение в неравенство ~~и упростим~~

$$\begin{cases} k^2 - 3k - 4 \neq 0 \\ k \neq 4; -1. \end{cases}$$

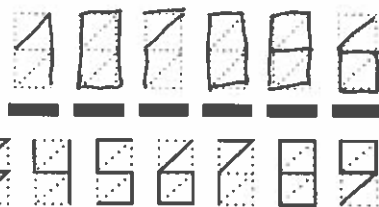
$$\frac{-(3k - 7) - |k + 9|}{2(k^2 - 3k - 4)} \leq \frac{-(3k - 7) + |k + 9|}{(k^2 - 3k - 4)}$$



$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$k^2 - 3k - 4 \neq 0$ т.к. тогда уравнение не является

$$k \neq \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow k \neq 4; -1$$

$$\frac{|k - (3k - 7)| - |k - 9|}{2(k^2 - 3k - 4)} \leq \frac{-(3k - 7) + |k - 9|}{k^2 - 3k - 4} \Rightarrow$$

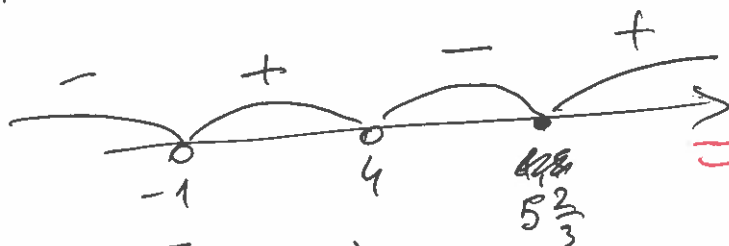
$$\frac{3|k - 9| - 3k + 7}{2(k^2 - 3k - 4)} \geq 0$$

т.к. по условию $k \in [5; 7]$, то можно рассмотреть

лишь 1 случай раскрытия модуля при $k < 9$:
и сократить 2 в знаменателе

$$\frac{3(-k + 9) - 3k + 7}{k^2 - 3k - 4} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-6k + 34}{(k - 4)(k + 1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(k - \frac{17}{3})}{(k - 4)(k + 1)}$$



$$\Rightarrow k \in (-1; 4) \cup [\frac{17}{3}; +\infty) \Rightarrow$$

на отрезке $[5; 7]$ $k \in [\frac{17}{3}; 7]$

$\Rightarrow$ благоприятных исходов: $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$

100%
Верный
ход
решения!
Грубая ошибка
в неравенстве
= 7 неверный
ответ!



Бланк олимпиадной работы

№6

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+yz+xz=14. \end{cases}$$

Найти длину градиента.

1) $x+y+z$ — радиус сферы:

Введем уравнение 1 в
изобраз:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=64$$

и возведем у него 2-ое; умножение на 2:

$$x^2+y^2+z^2=64-14 \cdot 2 \Rightarrow$$

$x^2+y^2+z^2=36$ — это уравнение сферы $R=6$
с центром в $(0;0;0)$.

Проверим ее пересечение с прямой $y+x=1$.

$$\begin{cases} y+x=1 \\ xy=14 \end{cases} \Rightarrow$$

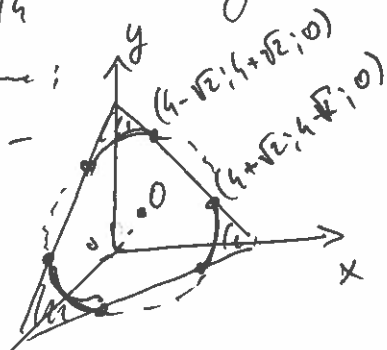
x и y корни уравнения вида:

$$a^2 - 1a + 14 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 56}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-55}}{2}$$

Объем градиента:

Пересек. с тач-
пунктом!



Необходимо найти
длину градиента