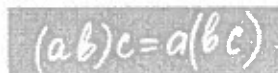




ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



$$E=mc^2$$



ШИФР

1 0 0 4 0 7
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания г. Мурманск МБОУ Гимназия №10

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	8	15	6	20	—	—	—	—	—	54	пятьдесят четыре	<i>М.А. Мухомов</i>

№1

по условию $\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3$

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} - 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^{12}}{2^6 a^6} - \frac{2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^6}{2^6} - \frac{2^6}{a^6} =$$

$$= \left(\frac{a^2}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{4}\right)^3 - \left(\frac{4}{a^2}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \frac{a^2 \cdot 4}{4 \cdot a^2} + \left(\frac{4}{a^2}\right)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{a^2}\right)^2 + 1\right) = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 4}{4 \cdot a^2} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right)^2 + 3\right) \quad \text{заменяю по условию}$$

$$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2}\right)^2 + 3\right) = 3 \cdot (3^2 + 3) = 3 \cdot (9 + 3) = 3 \cdot 12 = 36$$

Ответ: 36

55

Бланк олимпиадной работы

№ 3 (математика)

$$5x - x^2 + \sqrt{(16 - x^2)(-9 + 10x - x^2)} = 9$$

$$\sqrt{-(x^2 - 16)(-x^2 + 10x - 9)} = x^2 - 5x + 9$$

$$\sqrt{(x^2 - 16)(x^2 - 10x + 9)} = x^2 - 5x + 9$$

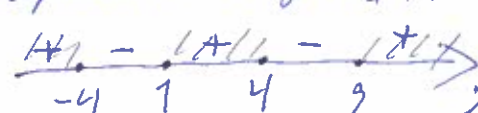
$$\begin{cases} (x^2 - 16)(x^2 - 10x + 9) \geq 0 \\ x^2 - 5x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x^2 - 16)(x^2 - 10x + 9)} = x^2 - 5x + 9$$

$$\begin{cases} (x-4)(x+4)(x-1)(x-9) \geq 0^* \\ x^2 - 5x + 9 \geq 0^{**} \\ (x^2 - 16)(x^2 - 10x + 9) = (x^2 - 5x + 9)^2 \end{cases}$$

* решая цепочку интервалов получим $f(x) = (x-4)(x+4)(x-1)(x-9)$

$f(x) = 0$ при $x = \pm 4, 1, 9$



$x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty)$

** $x^2 - 5x + 9 = 0$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 9 = 25 - 36 = -11 < 0$, т.е. $a = 1 > 0$

(сд-старший коэффициент), то $x^2 - 5x + 9 \geq 0$ при любых x , т.е. $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 16x^2 + 160x - 144 = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x^3 + 25x^2 - 45x + 9x^2 - 45x + 81 \end{cases}$$

Продолжите решение на месте?

Бланк олимпиадной работы

из (предположений)

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ x^4 - x^3 - 10x^2 + 10x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 25x^2 + 16x^2 + 9x^2 - 30x - 160x + 61 + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ 550x^2 - 250x + 225 = 0 \quad | : 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ 2x^2 - 10x + 9 = 0 \quad D = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 100 - 72 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ \begin{cases} x = \frac{10 + \sqrt{28}}{4} \\ x = \frac{10 - \sqrt{28}}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty) \\ \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

оба найденных корня сдв. $x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty)$

Ответ: $\frac{5 + \sqrt{7}}{2}, \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$

150

Бланк олимпиадной работы

1 ч (начало)

1. У нас есть кольцо с n непрерывными сечениями
 узкий участок ^{пересечения} между всеми радиусами делен
 длиной 18 см, отсюда расстояние между радиусами
 должно быть одинаково, отсюда радиусы в вершинах
 правильного 8-угольника



рис. 1

2. В каждой пересечении кольца радиуса
 AB - сечение узкий участок пересечения $AB = 18$ см,
 O_1, O_2 - радиусы, $O_2B = O_2A = O_1A = O_1B = 15$ см -
 радиусы покрытия радиуса. т.к. $O_2B = O_2A$ то $\triangle O_2BA$ -
 равнобедренный. Аналогично для $\triangle BAO_1$. точки O_1 и O_2 - лежат
 на одной прямой, отсюда опуская из них перпендикуляры
 на AB они совпадут в точке O (т.к. AB - общая сторона и
 $\triangle ABO_2 = \triangle ABO_1$ по 3 сторонам). отсюда $AB \perp O_1O_2$ и т.д.
 $O_1B = BO_2 = O_2A = AO_1$, то BAO_2CO_1 - ромб. т.к. O_2C - высота,
 то $\triangle BO_2C$ - правильный $BO = OA = \frac{1}{2}BA$ по св-ву диаг. ромба,
 отсюда по теореме Пифагора $BO^2 = BO_2^2 + O_2O^2$ $OO_2 =$
 $OO_2 = \sqrt{9^2 + 15^2} = 12$ отсюда $O_1O_2 = 20 \cdot 2$. по св-ву углов радиусов
 отсюда расстояние между радиусами 24 см



3. т.к. - радиусы стоят в вершинах куб. 8-угольника
 по касательным радиусам они образуют 2 $\triangle$ (рис. 2) $\angle HFB = 135^\circ$ т.к. $AB C D E F G H$ - куб
 (проецирование на плоскость 3)



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

100407

0123456789

Бланк олимпиадной работы

и (крестовина)

HB - расстояние $HB^2 = AB^2 + AH^2 - 2 \cdot AB \cdot AH \cdot \cos 135^\circ$

$$\Rightarrow HB^2 = 24^2 + 24^2 - 2 \cdot 24^2 \cdot \sqrt{2} \quad HB = 24\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\angle BOA = 45^\circ$ т.к. $\angle BOA$ - прямой, угол между диагоналями

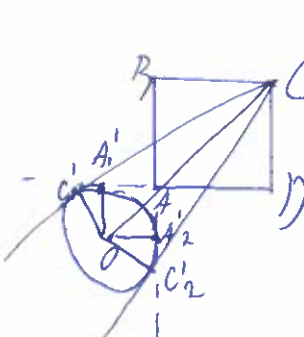
$\angle BOC = 2\angle BOA = 90^\circ$ и $OB = OH$ так как диагональ, т.е.

$$2OB^2 = HB^2 \quad OB = \frac{HB}{\sqrt{2}} = 24\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ (см)}$$

Ответ: на расстоянии $24\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ см

и 2

Се. Верный
ход решения,
верно найдено
О102! Далее
неверно!



$AMCD$ - квадрат $\angle C_1CC_2 = 45^\circ$ $AA_1 = AA_2 =$

$$AA_1CC_2, BA_1CC_2 - \text{прямоугольники} \quad \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$

Прямая AD
Заметим

1. т.к. AD и BA - диагонали $OA_1 \perp AD$ и $OA_2 \perp BA$ так как диагонали квадрата $AB \perp AD$ так как $ABCD$ - квадрат, то OA_2AA_1 - квадрат

2. $CA = \sqrt{2} \cdot AA_1$ (по теореме Пифагора из треугольника OA_1AA_1)

3. т.к. CC_2 и CC_1 - высоты на CO - диаметр окружности и $OC_2 \perp CC_1$, отсюда

$$CO = \frac{OC_2}{\sin \angle C_1CC_2} = \frac{AA_1}{\sin 22.5^\circ} \quad AA_1 = OC_2 \text{ как стороны квадрата}$$

$$4 \cdot CA = CO - OA \quad 5 \cdot AD = \frac{CA}{\sqrt{2}} \quad (\text{из теор. Пифагора и из квадрата } AA_1CC_2)$$

$$AD = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} \text{ (см)}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$ см

Се. Решение верное!
не представлено
Все правильно!

Бланк олимпиадной работы

15

$$k \in [5; 7]$$

$$(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 2)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 2)^2 - 4(k^2 - 3k - 4) \cdot 2 = 9k^2 - 12k + 4 - 8k^2 + 24k + 32 = k^2 - 10k + 36 = (k - 5)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3k + 2 - k + 5}{k^2 - 3k - 4} = \frac{-4k + 7}{(k+1)(k-4)} = \frac{-4(k-4)}{(k+1)(k-4)} = \frac{-4}{k+1} \\ x_2 = \frac{-3k + 2 + k - 5}{k^2 - 3k - 4} = \frac{-2k - 3}{(k+1)(k-4)} = \frac{-2(k+1)}{(k+1)(k-4)} = \frac{-2}{k-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-4}{k+1} \leq \frac{2 - (-2)}{k-4} \\ \frac{-2}{k-4} \leq \frac{-4 \cdot 2}{k+1} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-16 - 4k + 4k + 4}{(k+1)(k-4)} \leq 0 \\ \frac{8k - 32 - 2k - 2}{(k+1)(k-4)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{20}{(k+1)(k-4)} \leq 0 \\ \frac{6k - 34}{(k+1)(k-4)} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{метод} \\ \text{интервалов} \end{matrix} \quad \begin{cases} k \in (-1; 4) \\ k \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{17}{3}] \end{cases}$$

2005

отрезка, при условии что $k \in [5; 7]$ благоприятные k можно найти в промежутке $[5; 5\frac{2}{3}]$, c_1 - сумма благоприятных c - чисел всего чисел d - вероятности $\phi = \frac{c_1}{c} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$