



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания ФГБОУ ВО КузГТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	7	1	3	10	19	—	—	—	—	71	Семёнов Олег	Мам

Задание 1.

$$a^{12} - 4096 = (a^4)^3 - 16^3 = (a^4 - 16)(a^8 + 32a^4 + 256)$$

$$\frac{(a^4 - 16)(a^8 + 32a^4 + 256)}{64a^8} = \frac{a^4 - 16}{4a^2} \cdot \frac{a^8 + 32a^4 + 256}{16a^4}$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^4}{4a^2} - \frac{16}{4a^2} = \frac{a^4 - 16}{4a^2} = 3$$

$$\left(\frac{a^4 - 16}{4a^2}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{a^8 - 32a^4 + 256}{16a^4} = \frac{a^8 + 16a^4 + 256 - 48a^4}{16a^4} = \frac{a^8 + 16a^4 + 256}{16a^4} - 3 = 9$$

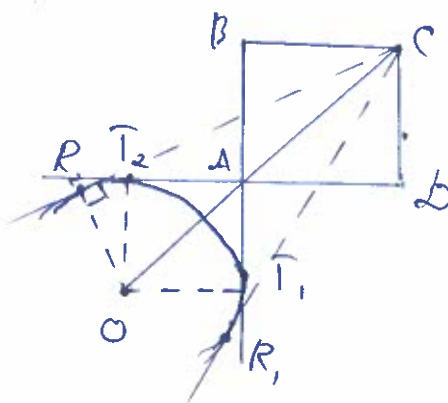
Отсюда $\frac{a^8 + 16a^4 + 256}{16a^4} = 12$; $\frac{a^4 - 16}{4a^2} = 3$; $3 \cdot 12 = 36$.

Ответ: 36

Задание 2.

Дано: ABCD - квадрат;
окр. (O) R; A T₁ = √2 + √2 · √2;
∠(R, CR₂) = 45°;

AB = ?



Решение: Проведём CO. т. А ∈ CO и АО - биссектриса ∠АТ₁С. АТ₁ = √2 + √2 · √2



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$(ab)c = a(bc)$ $E=mc^2$

Бланк олимпиадной работы

- касательные) $\Rightarrow \angle T_1AO = \angle T_2AO = 45^\circ$, значит, AO - диагональ и $\in$ прямой AO . CO - биссектриса $\angle R_2CR_1$, по т.к. AC - биссектриса $\angle BCD$ $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$.

Рассмотрим четырехугольник AT_1OT_2 . $\angle T_2AT_1 = 90^\circ$, как вертикальный $\angle$ $\angle BAD$; $\angle OT_2A = \angle OT_1A = 90^\circ$, т.к. радиусы OT_1 и OT_2 проведены в точки касания, перпендикулярны касательным AT_1 и AT_2 .
 $OT_1 = OT_2 = R \Rightarrow AT_1OT_2$ - квадрат.

$$OT_1 = OT_2 = R = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Диагональ AO квадрата OT_1AT_2 равна $\sqrt{2} OT_2 = \sqrt{2} R$.

$$= \sqrt{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}})^2} = (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \cdot \sqrt{2} = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \text{ см}$$

В $\triangle CR_2O$ $\angle CR_2O = 90^\circ$ (радиус OR_2 проведен в т. касания с прямой CR_2).

По теореме Пифагора $OC^2 = OR_2^2 +$

$\angle OCR_2 = 22.5^\circ$, т.к. CO - биссектриса $\angle R_1CR_2$

Значит, $\frac{OR_2}{OC} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow OC = OR_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)^{-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ см}$

$OC = AO + AC \Rightarrow AC = OC - AO = \left(\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right) \text{ см}$

$$\frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} - 2\sqrt{4(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + 2 - 2 - 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$AC^2 = AB^2$, по теореме Пифагора из $\triangle ABC$, т.к. $AB = BC$.

$$\frac{4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4 - 2} = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow AB^2 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Верный ход
решения!
Амишам
В
РАБОТАХ
при отработке
основательного
ответа!



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание 4.

Если 12 км – минимальная ширина кольца, то расстояние максимальна. Минимальная ширина достигается, если между точками касания

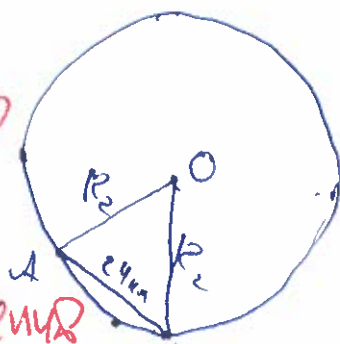
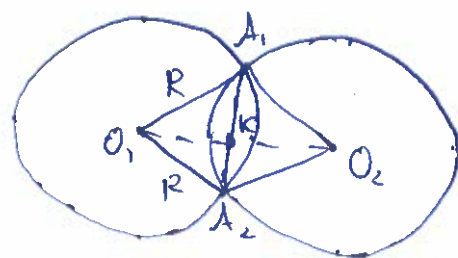
окружностей покрытия радаров. Т.к. A, A_2 – хорда окружностей O_1, O_2 , то $O_1O_2 \perp AA_2$ и $A_1K = A_2K = 9$ км

Из $\triangle A_2O_1K$ $O_1K = O_2K$ (т.к. $\triangle A_1A_2O_1 = \triangle A_1A_2O_2$ по 3м сторонам) $= \sqrt{A_2O_1^2 - A_2K^2} = \sqrt{R^2 - 9^2} = 12$ км.

Значит, $O_1O_2 = 24$ км, дальше друг от друга радары располагаться не могут, поэтому расстояние максимальна, если ~~каждый~~ радар расположен в 24 км от соседних.

Радаров 8, значит окружностей 8. Отсюда $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. По теореме косинусов, $AB^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos 45^\circ$
 $= 2R_2^2 - \sqrt{2}R_2^2 \Rightarrow R_2^2 \cdot \frac{24^2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{576}{2 - \sqrt{2}} = \frac{576(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} \Rightarrow R_2 = \frac{24}{\sqrt{2} - 1}$ км.

Отвеч: $24(\sqrt{2} + 1)$ км.



100% Хоть решение верное! (Верно найдено O_1O_2 ! Далеко неверно.)

Задание 5.

Найдем дискриминант:

$$D = (3k-7)^2 - 4(k^2-3k-4) = 9k^2 - 42k + 49 - (4k^2 - 12k - 16) = 5k^2 - 30k + 65 = (k-3)^2 + 32$$

$$x_1 = \frac{7-3k \pm \sqrt{D}}{2(k^2-3k-4)} = \frac{-2k-2}{2(k^2-3k-4)} = \frac{-k-1}{k^2-3k-4}, \quad x_2 = \frac{7-3k-k+9}{2(k^2-3k-4)} = \frac{16-4k}{2(k^2-3k-4)} = \frac{8-2k}{k^2-3k-4}$$

На промежутке $[5; 7]$ $k \geq 4 \Rightarrow$ оба корня отрицательны (т.к. $k^2-3k-4 = (k-4)(k+1)$)

При этом неважно, какой из корней $-x_1$, какой $-x_2$. Запишем неравенства на оба случая:

- 1) $x_1 \leq 2x_2$
- 2) $x_2 \leq 2x_1$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

110620

123456789

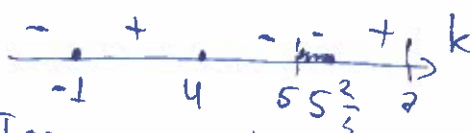
Бланк олимпиадной работы

$$5. \frac{-k-1}{k^2-3k-4} \leq \frac{16-4k}{k^2-3k-4}$$

$$\frac{4k-16-k-1}{k^2-3k-4} \leq 0$$

$$\frac{3k-17}{(k+1)(k-4)} \leq 0$$

$$(k-5\frac{2}{3})(k+1)(k-4) \leq 0$$



Подходящие k лежат в промежутке $[5; 5\frac{2}{3}]$

Значит, $k \in [5; 5\frac{2}{3}]$ — длина этого промежутка $\frac{2}{3}$, что составляет $\frac{1}{3}$ от длины общего промежутка $[5; 7]$ (2) $\Rightarrow$ вероятность того, что точка k попадет именно на этот промежуток, составляет $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 6.

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ xy+yz+xz=14 \end{cases}$$

$$(x+y+z)^2=64$$

$$2(xy+yz+xz)=28$$

$$(x^2+2xy+y^2)+2(x+y)z+z^2=64$$

$$2(xy+yz+xz)=28$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=64 \\ 2(xy+yz+xz)=28 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=36$$

$$x^2+y^2+z^2=6^2 \quad (1)$$

140. Хоть решение верное! Попытано верное соотношение (1). Далее проверю!

Уравнение (1) — уравнение сферы радиуса 6 с центром в и. (0,0,0)

Длина кривой равна площади поверхности данной сферы.

Длина одной окр-ти в сфере — $2\pi R = 12\pi$ как и длина окр-ти посередине сферы.

Лист 4 из 6



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



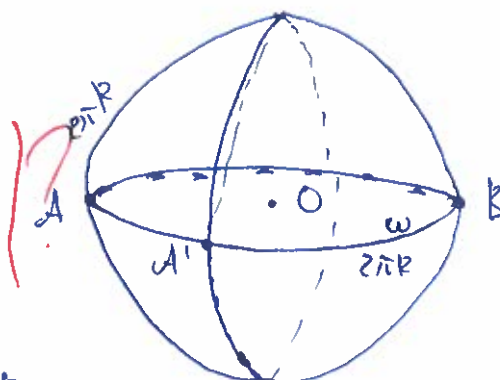
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

6. Возьмём Γ . А на окружности ω . Из
нее проведём окружность в плоскости, перпендикулярной плоскости окр-ти ω . Длина этой окружности — тоже $2\pi R$. Проведём
т. А по окружности ω до точки В, мы можем задать всю сферу. Длина $\cup AB = \pi R$.
Таким образом S поверхности сферы — $2\pi^2 R^2$. $2 \cdot 11 \cdot 11^2 = 72\pi^2$ как
и длина грота.
Ответ: $72\pi^2$.



Задача 2

$$5x - x^2 + \sqrt{(16-x^2)(-9+10x-x^2)} = 9$$

$$\sqrt{(x-4)(x+4)(x-1)(x-9)} = x^2 - 5x + 14 + 5$$

$$\sqrt{(x-4)(x+4)(x-1)(x-9)} = (x-1)(x-4) + 5$$

$$\sqrt{(x-1)(x-4)} \cdot \sqrt{(x+4)(x-9)} = (\sqrt{(x-1)(x-4)})^2 + 5$$

$$\sqrt{(x-1)(x-4)} \cdot (\sqrt{(x+4)(x-9)} - \sqrt{(x-1)(x-4)}) = 5$$

$$(x-1)(x-4) - ((x+4)(x-9) - 2\sqrt{(x-1)(x-4)})$$

$$\sqrt{(x^2-16)(x^2-10x+9)} = x^2 - 5x + 9$$

$$(x^2-16)(x^2-10x+9) = (x^2-5x+9)^2$$

$$(x^4-16x^2-10x^3+160x+9x^2-144) = x^4-2x^2(5x-9)+(5x-9)^2$$

$$x^4-10x^3-7x^2+160x-144 = x^4-10x^3+18x^2+25x^2-90x+81$$

$$18x^2+7x^2+25x^2-90x-160x+81+144=0$$

$$50x^2-250x+225=0 \quad | :25$$

$$2x^2-10x+9=0$$

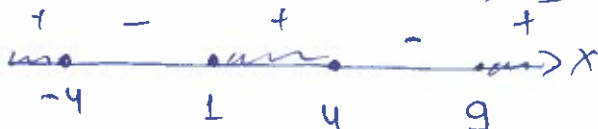
$$D=100-4 \cdot 2 \cdot 9=100-72=28$$

$$x_1 = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

ОДЗ:

$$(x^2-16)(x^2-10x+9) \geq 0$$

$$(x-4)(x+4)(x-9)(x-1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty)$$

100% VLO
(Решение 1/6)

$$x^2-5x+9 > 0 \text{ при всех } x.$$

$$\Delta = 25-36 < 0$$

Лист 5 из 6



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$2. \frac{5+\sqrt{7}}{2} > 1, \text{ -покажем}$$

$$\frac{5+\sqrt{7}}{2} < 4$$

$$5+\sqrt{7} < 8$$

$$25+7+10\sqrt{7} < 64$$

$$10\sqrt{7} < 32$$

$$\sqrt{7} < 3,2$$

$$7 < 3,2^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{5-\sqrt{7}}{2} > 1$$

$$5-\sqrt{7} > 2$$

$$25-10\sqrt{7}+7 > 4$$

$$32 > 10\sqrt{7}$$

$$3,2 > \sqrt{7}$$

$$2,54 > 7$$