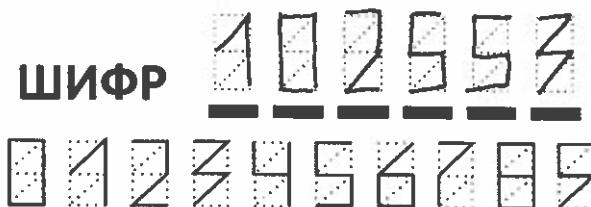




ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МБОУ СМАЛ г.о. Самара

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	8	20	30	-	-	-	-	88	восемьдесят восемь	

$$\begin{aligned}
 \frac{a^{12} - 729}{27a^6} &= \frac{a^{12}}{27a^6} - \frac{729}{27a^6} = \frac{a^6}{27} - \frac{27}{a^6} = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 - \left(\frac{3}{a^2}\right)^3 = \\
 &= \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a^2}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{a^2}\right) = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{a^2} + 3 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{a^2}\right) \\
 &= \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right) \left(\left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right)^2 + 3\right) = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right)^3 + 3\left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right)
 \end{aligned}$$

По условию $\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2} = 4$, тогда

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} = \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right)^3 + 3\left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2}\right) = 4^3 + 4 \cdot 3 = 76.$$

Ответ: 76.

+

55.

Бланк олимпиадной работы

№24

Дано: $AD' = AB' = (6 - 2\sqrt{5}) \text{ см}$

CX и CY - касательные

$\angle XCY = 36^\circ$

$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Найти: $AB = AD = CB = CD = a - ?$

Решение: 1) $AB \perp AD'$ (продолжение
сторон квадрата)

$OD' \perp AD'$ (радиус в т. касания)
 $OB' \perp AB'$

$AB'O D'$ - квадрат $\Rightarrow AD' = AB' = r$ - радиус окр.

2) $\angle XCO = \angle YCO = \frac{1}{2} \angle XCY$, т.к. CO - линия проведенная к центру окр. O .

$\Rightarrow \angle XCO = \frac{1}{2} \angle XCY = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$

3) Найдя CO по т. Пифагора: $CO = (a+r)\sqrt{2}$

4) Рассмотрим $\triangle COX \rightarrow \angle CXO = 90^\circ$ (радиус в т. касания)
 $\Rightarrow \triangle COX$ - пчу $\Rightarrow \sin \angle XCO = \frac{XO}{CO} \Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{r}{(a+r)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Найдя a - сторону квадрата: $(a+r)\sqrt{2} = \frac{4r}{\sqrt{5}-1}$
 $a = \frac{4r}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} - r = \frac{4(6-2\sqrt{5})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} - (6-2\sqrt{5}) = \frac{4 \cdot (\sqrt{5}-1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} - (\sqrt{5}-1)^2 =$

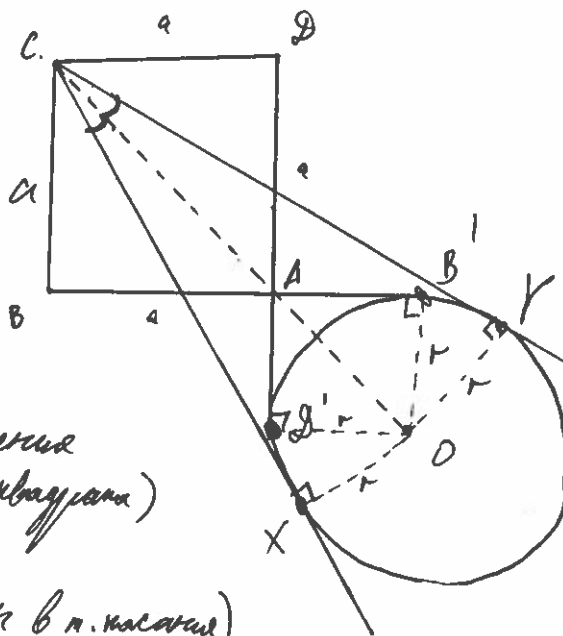
$= (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 1)(\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{10} - 5 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 6$

Ответ: $2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 6$

+

108.

Лист 2 из 7



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$\sqrt[3]{4x - x^3 + \sqrt{(9 - x^2)(-7 + 8x - x^2)}} = 7$$

$$\sqrt{(x^2 - 9)(x^2 - 8x + 7)} = x^2 - 4x + 7$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 7 \geq 0 & (1) \\ (x^2 - 9)(x^2 - 8x + 7) \geq 0 & (2) \\ (x^2 - 4x + 7)^2 = (x^2 - 9)(x^2 - 8x + 7) & (3) \end{cases}$$

$$(1) : x^2 - 4x + 7 \geq 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 - \text{всегда} \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(2) : (x^2 - 9)(x^2 - 8x + 7) \geq 0$$

$$(x+3)(x-3)(x-3)(x-7) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & & \\ | & | & | & | & | & & \\ -3 & 3 & 3 & 7 & x & \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [1; 3] \cup [7; +\infty) \end{array}$$

$$(3) : (x^2 - 4x + 7)^2 = (x^2 - 9)(x^2 - 8x + 7)$$

$$\underline{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 28x + 7x^2 - 28x + 49} = \underline{x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 9x^2 + 72x - 63}$$

$$32x^2 - 128x + 112 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 14 = 0$$

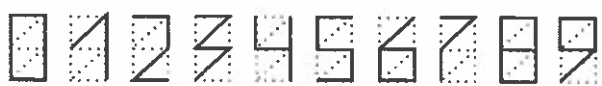
$$\Delta = 16^2 - 16 \cdot 14 = 16 \cdot 2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$x = \frac{16 \pm 4\sqrt{2}}{2 \cdot 4} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Получаем:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in (-\infty; -3] \cup [1; 3] \cup [7; +\infty) \\ \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 2,7 \in [1; 3] \\ x = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,3 \in [1; 3] \end{cases} \end{cases}$$

Получаеме ыровый ответ:

Ответ: $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

+ 158.

u5/

$$k \in [6; 10]$$

$$(k^2 - 3k - 10)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0.$$

$$k^2 - 3k - 10 = 0 \text{ при } k = -2 \text{ и } k = 5$$

При $k \in [6; 10]$ $k^2 - 3k - 10 > 0$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2x_2 + x_2$$

По м. Виета $x_1 + x_2 = -\frac{(3k-8)}{(k^2-3k-10)}$

$$\frac{-(3k-8)}{k^2-3k-10} \leq 3 \cdot \frac{-(3k-8)}{2 \cdot (k^2-3k-10)}, \text{ т.к. } k^2-3k-10 > 0$$

$$-(3k-8) \leq -\frac{3}{2}(3k-8) + \frac{3}{2}\sqrt{0}$$

$$\frac{1}{2}(3k-8) \leq \frac{3}{2}\sqrt{0}$$

$$k - \frac{8}{3} \leq \sqrt{0}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$\begin{aligned} D &= (3k-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 3k - 10) = 9k^2 + 64 - 48k - 8k^2 + 24k + 80 = \\ &= k^2 - 24k + 144 = (k-12)^2 \end{aligned}$$

$$k - \frac{8}{3} \leq \sqrt{(k-12)^2}$$

$$k - \frac{8}{3} \leq |k-12|$$

Понимая как. $k \in [6; 10]$, т.к. $k-12 < 0 \Rightarrow |k-12| = 12-k$

$$k - \frac{8}{3} \leq 12 - k$$

$$2k \leq \frac{44}{3}$$

$$k \leq \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Итак, вероятность, что $k \leq 7\frac{1}{3}$

$$P = \frac{7\frac{1}{3} - 6}{10 - 6} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

+ 208.

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ xy+yz+xz=-22 \end{cases}$$

Возведем 1-е в квадрат и вычтем из него удвоенное 2-е.

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = 100 + 44 = 144$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2xy - 2yz - 2xz = 144$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 144$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

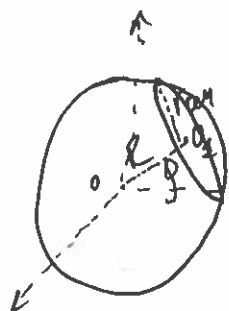
Получаем систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x^2+y^2+z^2=12^2 \end{cases}$$

$x+y+z=10$ — задает плоскость

$x^2+y^2+z^2=12^2$ — задает сферу радиуса 12.

Итого, ограничивающее это сечение сферы плоскостью, будет искомым кривой. Эта плоскость всегда пересекает сферу по окружности $\Rightarrow$ длину кривой можно найти как $l = 2\pi r_{\text{сеч}}$, где $r_{\text{сеч}}$ — радиус окружности полученного сечения.



Найдем $r_{\text{сеч}}$, для этого рассмотрим прямоугольный треугольник, в котором R — радиус сферы, ρ — расстояние от центра сферы до плоскости.

$$x+y+z-10=0$$

$$\left. \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=-10 \end{array} \right\} \text{ т.к. точка } O \text{ (центр сферы) лежит в начале координат,}$$

$$\text{то } \rho = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Итого } r_{\text{сеч}} \text{ по м. Пифагора: } r_{\text{сеч}}^2 = R^2 - \rho^2 = 144 - \frac{100}{3} = \frac{332}{3}$$

$$\text{Итого } l = 2\pi r_{\text{сеч}} = 2\pi \sqrt{\frac{332}{3}} + 308$$

$$\text{Ответ: Длина кривой } 2\pi \sqrt{\frac{332}{3}} = 4\pi \sqrt{\frac{83}{2}}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

№4/

Дано: $d = 16 \text{ км}$

$r = 17 \text{ км}$

$N = 8$

Найти: $R_{\max}$?

S ?

Решение: Найти расстояние при котором $d = 16 \text{ км}$

По т. Пифагора: $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow 17^2 = 8^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l = 30 \text{ км}$

Так как радиусов $N = 8$, то угол α между соседними радиусами

$$\alpha = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Найти $R_{\max}$ по т. косинусов: $l^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \alpha$

$$l^2 = 2R^2(1 - \cos \frac{\pi}{4}) = 2R^2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow R = \frac{l}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Найти площадь $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 - \text{внутренний радиус, } R_1 = R - \frac{d}{2} \\ R_2 - \text{внешний радиус, } R_2 = R + \frac{d}{2} \end{array} \right\} S = \pi \left(\left(R + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{d}{2}\right)^2 \right) = \pi \cdot 2R \cdot d = \frac{2\pi d l}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Ответ: $R_{\max} = \frac{30}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ км}$ +

$$S = \frac{960\pi}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ км}^2$$

Неверно вычислена R_1 и R_2
 $R_1 = \text{длина высот } h - \frac{d}{2}$
 $R_2 = \text{длина высот } h + \frac{d}{2}$