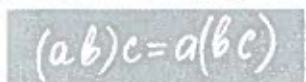




ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



$$E=mc^2$$



ШИФР

107114

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МОУ СОШ №1 с УИОП г. НАДЫНА

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	14	6	10	0	-	-	-	-	45	сорок пять	<i>Мам</i> <i>10</i>

Ответы:

Задача 1: 76

Задача 2: $\sqrt{104 - 32\sqrt{10}} - 40\sqrt{5} + 64\sqrt{2}$

Задача 3: $2 \pm \frac{\sqrt{27}}{2}$

Задача 4: 1103, 9

Задача 5: 0,33; 0

Задача 6: 52, 12

Решения приведены ниже.



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} - \frac{a^2 - 3}{a^2} = 4 \quad \text{Задание 1.}$$

Решение:

$$\frac{a^2 - 3}{a^2} = \frac{a^4 - 9}{3a^2}; \quad \left(\frac{a^4 - 9}{3a^2}\right)^3 = \frac{(a^4 - 9)^3}{(3a^2)^3} = \frac{a^{12} + 243a^4 - 27a^8 - 729}{27a^6} =$$

$$= \frac{a^{12} - 729}{27a^6} - \frac{27a^8 - 243a^4}{27a^6};$$

$$\frac{27a^8 - 243a^4}{27a^6} = \frac{27(a^8 - 9a^4)}{27a^6} = \frac{a^4(a^4 - 9)}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^4 - 9}{a^2},$$

так как $\frac{a^4 - 9}{3a^2} = 4$, то $\frac{a^4 - 9}{a^2} = 4 \cdot 3 = 12$; значит

$$\left(\frac{a^4 - 9}{3a^2}\right)^3 = -\frac{a^4 - 9}{a^2} + \frac{a^{12} - 729}{27a^6} \Rightarrow$$

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} = \left(\frac{a^4 - 9}{3a^2}\right)^3 + \frac{a^4 - 9}{a^2} = 4^3 + 12 = 64 + 12 = 76$$

Ответ: 76. +

55.

Задание 3.

$$4x - x^2 + \sqrt{(9 - x^2)(-7 + 8x - x^2)} = 7$$

$$\sqrt{(9 - x^2)(-7 + 8x - x^2)} = 7 - 4x + x^2$$

$$(9 - x^2)(-7 + 8x - x^2) = (7 - 4x + x^2)(7 - 4x + x^2)$$

$$-63 + 72x - 9x^2 + 7x^2 - 8x^3 + x^4 = 49 - 28x + 7x^2 - 28x + 16x^2 - 4x^3 + 7x^2 - 4x^3 + x^4$$

$$-9x^2 + 7x^2 - 63 + 72x = 7x^2 + 7x^2 + 16x^2 - 28x + 49 - 28x$$

$$32x^2 - 128x + 112 = 0 \quad | : 16$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac, \quad D = 64 - 56 = 8, \quad D > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_1 = \frac{8 + \sqrt{8}}{4}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{8}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Бланк олимпиадной работы
Задание 3 (Часть 2)

$$OD3: (9-x^2)(-7+8x-x^2) \geq 0$$

$$(3-x)(3+x)(7-x)(x-1) \geq 0, \text{ введем функцию } f(x) = (x-1)(7-x)(3-x)(3+x)$$

Решим методом интервалов: нули функции -1; 3; 7; -3

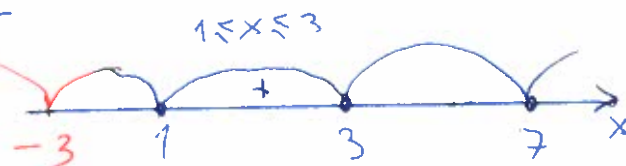
$$2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in [1; 3], \text{ т.к. } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

При $1 \leq x \leq 3$:

$$(3-x)(3+x)(7-x)(x-1) \geq 0,$$

значит оба решения подходят.

$$\text{Ответ: } 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + 148.$$



Если начали искать О.Д.З., то надо довести до конца!

Задание 2.

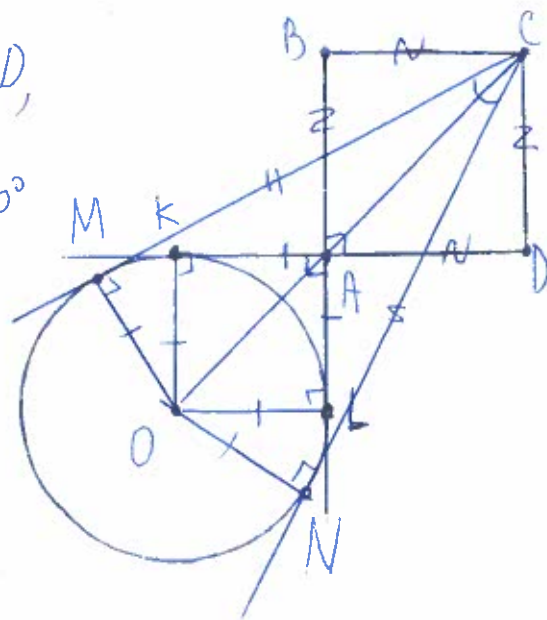
Дано: окружность ω , квадрат $ABCD$, AK, AL, CM, CN — касательные к окружности ω ; $KA = 6 - 2\sqrt{5}$, $\angle KAL = 90^\circ$, $\angle MCN = 36^\circ$; $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Найти:

$$AD = ?$$

Решение:

- По свойству касательных: $\angle CMO = \angle CNO = \angle AKO = \angle ALO = 90^\circ$
- По свойству касательных, выходящих из одной точки: $AK = AL, CM = CN$
- Рассмотрим прямоугольные $\triangle ALO$ и $\triangle AKO$; $\triangle ALO = \triangle AKO$ по гипотенузе и катету ($AK = AL, AO$ — общая).





$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание 2 (Часть 2)

4) Из п.3): $OK = LO$, $\angle KAO = \angle KOA = \angle LAO = \angle LOA = 45^\circ$,
значит $KALO$ — квадрат по определению.

5) Из п.4): $MO = NO = KO = LO = AK = AL = 6 - 2\sqrt{2}$, поскольку
 OK, OL, OM и ON — радиусы.

6) Рассмотрим $\triangle CON$; ~~из~~ $\triangle CON = \triangle MOC$ по
~~критерию~~ ~~и~~ ~~известно~~ трём сторонам. Тогда
 $\angle OCN = 18^\circ$, значит

$$\frac{ON}{OC} = \sin 18^\circ, \quad \frac{6 - 2\sqrt{5}}{OC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Rightarrow$$

$$OC = \frac{24 - 8\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(24 - 8\sqrt{5})(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{24\sqrt{5} - 40 + 24 - 8\sqrt{5}}{4} =$$

$$\frac{16\sqrt{5} - 16}{4} = 4\sqrt{5} - 4$$

7) $OC = OA + AC$, где OA — диагональ кв. $KALO$,
а AC — диагональ кв. $ABCD$; из теоремы
Пифагора в прямоугольном $\triangle ALO$:

$$AO = \sqrt{2(6 - 2\sqrt{5})^2} = \sqrt{2}(6 - 2\sqrt{5})$$

8) Из п.6, п.7:

$$AC = 4\sqrt{5} - 4 - \sqrt{2}(6 - 2\sqrt{5}), \text{ из теоремы Пифагора:}$$

$$AD = \sqrt{\frac{(4\sqrt{5} - 4 - \sqrt{2}(6 - 2\sqrt{5}))^2}{2}} = \sqrt{\frac{208 - 84\sqrt{10} - 80\sqrt{5} + 128\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{104 - 32\sqrt{10} - 40\sqrt{5} + 64\sqrt{2}}$$

Ответ: $\sqrt{104 - 32\sqrt{10} - 40\sqrt{5} + 64\sqrt{2}}$

$$AD = \frac{AC}{\sqrt{2}}!$$

+ 108.


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

Бланк олимпиадной работы

Задание 4

$$r = BO_1 = BO_2 = 17 \text{ km}$$

$AB = 16 \text{ km}$

Найти: $00_1 - 2 S_{(1)} - 2$

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle OO_1O_2$:

$$\angle O_1 O O_2 = \frac{360}{8} = 45^\circ, \text{ поскольку}$$

8 лучей образуют правильный
многоугольник (8-мугольник), тогда

$\angle QOR = \angle Q_2OR = 45^\circ$; (поскольку точки Q, Q_2 равноудалены от T, O);

2) Рассмотрим $\triangle QOR = \triangle O_2OR$ по двум сторонам и

∠ между ними, тогда $Q_1 R = Q_2 R$

3) Рассмотрим $\triangle O_1RA \triangle O_1RB \triangle O_2RB \triangle O_2RA$ по трем сторонам; тогда $AR = BR = \frac{16}{2} = 8$ км

4) Из теоремы Пифагора в прямоугольном $\triangle QRA$: $QR = \sqrt{QA^2 - AR^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ км}$ +

5) $\sin \angle QOR = \sin \frac{45^\circ}{2} = \frac{OR}{OQ}$, тогда

$\alpha_1 = \frac{0.1R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; во формуле показанного угла ошибка в 10 раз меньше

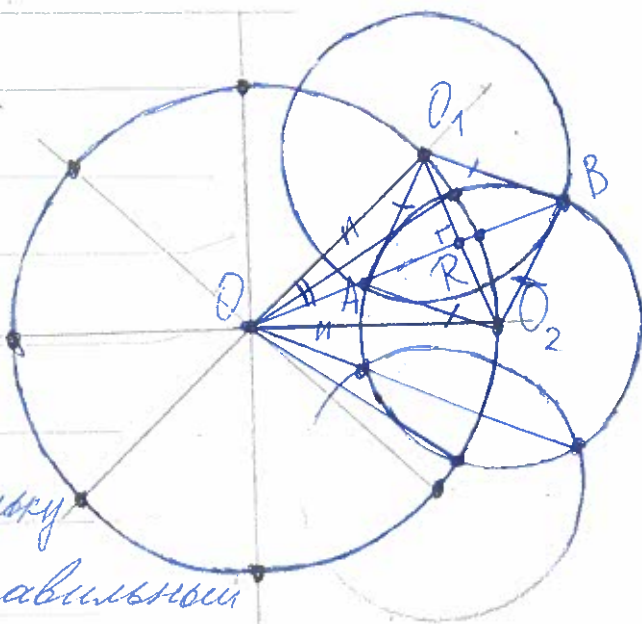
$$\sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0.9 \leq \frac{15 \text{ km}}{\sqrt{\frac{12}{2}}} \quad S_e = \pi \cdot 0.01^2 \cdot \left(\frac{15}{\sqrt{\frac{12}{2}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{15}{\sqrt{0.7}} \right)^2 \cdot \left(\frac{15}{0.8} \right)^2 = 16.75 \text{ km}^2$$

$\sim 1103,9 \text{ km}^2$
 Ober: $\frac{15}{\sqrt{2}} \text{ km} \cdot 18,75 \text{ km}^2$

65. за идеи.

Лист 5 из 8





$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание N5.

$$(k^2 - 3k - 10)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0, \quad x_1 \leq 2x_2, \quad D = b^2 - 4ac$$

$$D = (3k - 8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 3k - 10) = k^2 - 24k + 144 =$$

$$= (k - 12)^2, \quad D > 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{8 - 3k + k - 12}{2(k^2 - 3k - 10)}; \quad x_2 = \frac{8 - 3k - k + 12}{2(k^2 - 3k - 10)}$$

Рассмотрим 2 случая: $x_1 \leq 2x_2$ и $2x_1 \geq x_2$; *затем?*

$$1) \frac{8 - 3k + k - 12}{2(k^2 - 3k - 10)} \leq \frac{2(8 - 3k - k + 12)}{2(k^2 - 3k - 10)} \quad | \cdot (k^2 - 3k - 10); (k \in \mathbb{R}; k \neq -2, k \neq 5)$$

в задании условие

$$8 - 3k + k - 12 \leq 2(8 - 4k + 12)$$

$$\underline{x_1 \leq 2x_2}$$

$$-8 - 2k - 4 \leq 40 - 8k$$

$$6k \leq 44$$

$$k \leq 7, (3) = 7 \frac{1}{3}$$

$$\frac{7,33 - 6}{10 - 6} \leq \frac{1,33}{4} \approx 0,33$$

используйте обыкновенные дроби, чтобы получить точный ответ.

$$2) 2x_1 \geq x_2:$$

$$2(-2k - 4) \geq 20 - 4k$$

$$-4k - 8 \geq 20 - 4k$$

$-8 \geq 20$, что невозможно, значит вероятность равна 0

Ответ: 0,33; 0.

108.

Задание 6.

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases}$$

Бланк олимпиадной работы

Задание 6 (Часть 2)

$$\begin{cases} z = 10 - x - y, \\ xy + y(10 - x - y) + x(10 - x - y) = -22 \end{cases}$$

$$xy + 10y - xy - y^2 + 10x - x^2 - xy = -22 \quad | \cdot (-1)$$

$$y^2 - 10y + x^2 - 10x + xy = 22$$

$$(y^2 - 10y + 25) + (x^2 - 10x + 25) - 50 + xy = 22$$

$$(y - 5)^2 + (x - 5)^2 + xy = 42$$

Построим график:

$$\begin{array}{ccccc} y & 5 \pm \sqrt{47} & 0 & 2 & 4 \pm \sqrt{54} \\ x & 0 & 5 \pm \sqrt{47} & 4 \pm \sqrt{54} & 2 \end{array}$$

Таким образом, график
симметричен относительно

графика $y_1 = x_1$ и
относительно графика

$$y_2 = -x_2 + 2x_0, \text{ где}$$

x_0 — координата x т. O

Найдём координату т. O :

$$DO = OB \Rightarrow \frac{|x_D + x_D|}{x} = \frac{x_D^2 + x_D}{x}, \text{ все три точки лежат на прямой}$$

$$y_1 = x_1, \text{ тогда}$$

$$2(y - 5)^2 + y^2 = 42;$$

$$3y^2 - 20y - 22 = 0; D = b^2 - 4ac = 400 + 264 = 664, D > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{664}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{166}}{3} \approx \frac{10 \pm 13}{3}$$



Бланк олимпиадной работы

Задание 6 (Часть 3)

$$x_0 = \frac{23 + (-3)}{3 \cdot 2} = \frac{20}{6} \approx 3,33, \text{ тогда } y_2 = -x_2 + 6,66$$

Найдём координаты точки A:

$$-x_2 + 6,66 = y_2 \Rightarrow$$

$$(1,66 - x)^2 + (x - 5)^2 + 6,66x - x^2 = 72$$

$$x^2 - 6,66x - 45,7384 = 0$$

$$D = 43,3556 + 182,9536 = 226,3092$$

$$x_{1,2} \approx \frac{6,66 \pm 15}{2} = 3,33 \pm 4,5$$

$$\text{Тогда } x_A = -4,17, y_A = 10,83$$

Найдём длины OA, OB с помощью теоремы

Пифагора в прямоугольных $\triangle OH_1B$, $\triangle OH_2A$:

$$OA = \sqrt{(3,33 + 4,17)^2 + (10,83 - 3,33)^2} = \sqrt{56,25 + 56,25} \approx 10,6$$

$$OB = \sqrt{(7,66 - 3,33)^2 + (7,66 - 3,33)^2} = \sqrt{36,98} \approx 6, \text{ тогда}$$

если по формуле длины окружности $C = \pi d = \pi 2r$,
то для эллипса $C = \pi(a+b) = \pi(OA+OB) = 52,124$

Ответ: ~~52,12~~

Ос.