

ШИФР

112645

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МБОУ Гимназия

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	13	0	16	1	-	-	-	-	45	сорок пять	



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание 1:

$$\frac{a^2 | a^2}{3} - \frac{3 | 3}{a^2} = \frac{a^4 - 9}{3a^2}$$

$$\left(\frac{a^4 - 9}{3a^2} \right)^3 = \frac{a^{12} - 729 - 27a^8 + 243a^4}{27a^6} = \frac{a^{12} - 729}{27a^6} - \frac{27a^8 - 243a^4}{27a^6} =$$

$$= \frac{a^{12} - 729}{27a^6} - \frac{27a^4(a^4 - 9)}{27a^6 a^2}$$

$$\text{П. к. } \frac{a^4 - 9}{3a^2} = 4 \Rightarrow \frac{a^4 - 9}{a^2} = 12$$

Таким образом,

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} - 12 = 4^3$$

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} - 12 = 6^3$$

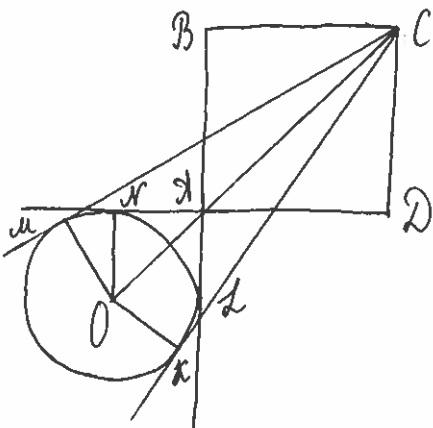
$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} = 76$$

Ответ: 76.

+

58.

Задание 2:



Дано: ABCD - квадрат

$\omega(O; r)$ касается AB в м. N, AD в м. L

CM, CK - касательные к ω

$\angle MCK = 36^\circ$, $MN = 6 - 2\sqrt{5}$ см

Найти: AB

Решение:

Бланк олимпиадной работы

1) Рассмотрим $\triangle CMO$ - прямоугольный ($OM = r$, CM - касательная $\Rightarrow OM \perp CM$):

$$\angle OCM = \frac{1}{2} \angle MCK = 18^\circ \text{ (п.к. } \omega \text{ вписана в } \angle MCK) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle OCM = \frac{OM}{CO} = \frac{\sqrt{5}-1}{5}$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{CO} = \frac{\sqrt{5}-1}{5}$$

$$CO = \frac{25-8\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \text{ см}$$

2) Рассмотрим $\triangle KNO$:

$$\angle KNO = \frac{1}{2} \angle KNL = 45^\circ \Rightarrow \triangle KNO - \text{равнобедренный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KN = KO = 6-2\sqrt{5} \text{ см}$$

по теореме Пифагора: $NO = \sqrt{KN^2 + KO^2} = \sqrt{2KN^2} = KN\sqrt{2} =$
 $= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10} \text{ см}$

3) Рассмотрим $\triangle KNO$ и $\triangle KDC$:

$$\angle KNO = \angle KDC = 90^\circ$$

$$\angle KNO = \angle DKC - \text{вертикальные} \Rightarrow \triangle KNO \sim \triangle KDC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{KN}{KD} = \frac{KO}{KC}$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{KD} = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{KC} \quad | : (6-2\sqrt{5})$$

$$\frac{1}{KD} = \frac{\sqrt{2}}{KC}$$

$$KD = \frac{KC}{\sqrt{2}} = \frac{CO - KO}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{25-8\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - 6\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{4(6-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{2}(6-2\sqrt{5})}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{5} - 5 - 4\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$$

Ответ: $\sqrt{5} - 5 - 4\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$

108-



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 3:

$$4x - x^2 + \sqrt{(9-x^2)(-7+8x-x^2)} = 7$$

Условие: $x^2 - 4x + 7 > 0$

$$D = 16 - 28 < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(9-x^2)(-7+8x-x^2) = (x^2-4x+7)^2$$

$$x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 72x - 63 = x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 49$$

$$32x^2 - 128x + 112 = 0 \quad |:16$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$D = 64 - 56 = 8$$

$$x_1 = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 6:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 100$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (-22) = 100 \leftarrow \text{за это } 15.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 44 = 100$$

$x^2 + y^2 = 144 - z^2$ — уравнение окружности $\Rightarrow (144 - z^2)^{1/2}$ — радиус
окружности в квадрате $\Rightarrow$ это уравнение сфер

$$144 - z^2 = (12 - z)(12 + z)$$

(3 координаты: x, y, z)
 $x^2 + y^2 + z^2 = 144$

$$12 - z = 12 + z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow r^2 = 144 \Rightarrow r = 12$$

Бланк олимпиадной работы

Длина окружности равна $2\pi r = 2 \cdot 12\pi = 24\pi \Rightarrow$ длина прогиб равна 24π .

Ответ: ~~24π~~ .

Задача 5:

$$(k^2 - 3k - 10)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 8)^2 - 8(k^2 - 3k - 10) = (k - 12)^2 \geq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{-3k + 8 + k - 12}{2(k^2 - 3k - 10)} = -\frac{1}{k-5}$$

$$x_2 = \frac{-3k + 8 - k + 12}{2(k^2 - 3k - 10)} = -\frac{2}{k+2}$$

k - любое число из промежутка $[6; 10]$, не обязательно целое!

~~$x_1 \leq 2x_2$~~ :

$$-\frac{1}{k-5} \leq -\frac{4}{k+2}$$

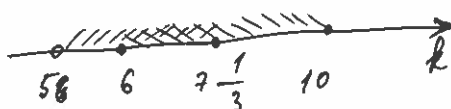
$$\frac{4k - 20 - k - 2}{(k-5)(k+2)} \leq 0$$

$$\frac{3(k - 7\frac{1}{3})}{(k-5)(k+2)} \leq 0$$



$$k \in (5; 7\frac{1}{3}]$$

т.к. $k \in [6; 10]$, то:



$$k \in [6; 7\frac{1}{3}]$$

Вероятность равна: $\frac{7\frac{1}{3} - 6}{10 - 6} = \frac{1\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$ Лист 5 из 5

Решено - 1

16.5