

Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.23

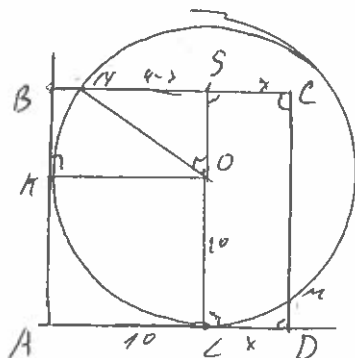
Площадка написания Лист №1 г. Южно-Сахалинск

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	00	6	20	20	18	—	—	—	—	—	64	шестьдесят четыре	<i>М.А.М.</i>

н. 2



Дано: K, L - точки касания

$$OK = OL = 10$$

$$KC = 4$$

$$MD = 2$$

Найти: BC .

Решение:

K, O, L, M - квадрат, т.е. $KO = OL$, $KO \perp AN$, $AL \perp OL$,

$OL \perp KO$ по св-ву касательных

$KA \perp AL$, т.е. $ABCD$ - квадрат

$$KO = OL = AL = AK = 10$$

Пусть $LD = x$ S - точка пересечения продолжений OL и BC .

$LD \perp CS$ - прямоугольник, т.е. $LP \perp DC$, $LD \perp CS$, $BC \perp LD$

$$LD = CS = x$$

$$MS = MC - CS = 4 - x$$

$OM = 10$ - радиус

R в MLD - прямоугольник, тогда $\angle$ Пифагор

$$SO = \sqrt{OM^2 - MS^2} = \sqrt{100 - (4-x)^2}$$

$$OS = SO + BC = \sqrt{100 - (4-x)^2} + 10$$

$$SL = LD, LD = AD = 10 + x \quad SL = AD \quad AD = 10 + x$$

$$10 + x = \sqrt{100 - (4-x)^2} + 10$$

$$x^2 = 100 - (4-x)^2$$

$$x^2 = 100 - 16 + 8x - x^2$$

$$2x^2 - 8x - 84 = 0$$

$$x^2 - 4x - 42 = 0$$

Объяснение на рисунке не совпадает с решением!

Бланк олимпиадной работы

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$D = 16 + 48 = 64 = 8^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} = 2 \pm 4$$

$$x_1 = 6$$

$x_2 = -2$ - не подходит, т.к. расстояние ≥ 0

$$SC = LD = 6 \text{ см}$$

$$AD = AC + CD = 16 \text{ см}$$

$SO = BK$, т.к. $BSOK$ - прямоугольник, т.е. $BK \perp KO$

$KO \perp OS$, и $BK \perp BK$ $\Rightarrow SO = OL = SL - OL = 16 - 10 = 6 \text{ см}$

$$BK = 6 \text{ см}$$

Ответ: 6 см.

Задача 3.

Вероятность $\frac{1}{3}$ равна

$\frac{\text{кол. во удачных}}{\text{общее кол. во}}$ в обеих вероятностях

в знаменателе число, критное $\frac{1}{3} = \frac{\text{общее кол. во}}{\text{критное}}$

критно $\frac{1}{3}$. Известно, что проб надо не менее 20 меньше 200, ближайшее число меньше 200 и

$\frac{1}{3} = 68 \Rightarrow$ проб было 198.

по формуле кол. во проб с тяжёлой и лёгкой =

$$\frac{1}{3} \cdot 198 = 66 \Rightarrow \text{с лёгкой } 198 - 22 = 176.$$

Вероятность того, что проб лёгкая, монотониста =
 = вероятность того, что лёгкая * на вероятность того, что
 это монотониста. Пусть вероятность того, что
 монотониста = x , тогда $x \cdot \frac{176}{198} = \frac{11}{18}$

$$x \cdot \frac{8}{9} = \frac{11}{18} \quad | \cdot 18$$

$$46x = 11$$

$$x = \frac{11}{46}$$

высоко серииста $1 - \frac{11}{46} = \frac{35}{46}$

состоит из всего тяжёлой $\frac{1}{3} \Rightarrow$ лёгкой $\frac{2}{3}$. Лёгкая
 состоит из высоко серииста ($\frac{35}{46}$) и высоко серииста ($\frac{8}{9} - \frac{11}{46}$)

высоко серииста состоит из всей тяжёлой ($\frac{1}{3}$) и не
 части лёгкой ($\frac{8}{9} - \frac{11}{46}$)

Бланк олимпиадной работы

$$\frac{1}{80} + \frac{0}{9} - \frac{11}{18} = \frac{5}{18} \quad \frac{5}{18} \cdot 108 = 55$$

Ответ: 55

Задача 4.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}}{400}$$

$$400 \cdot x_n = x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}$$

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$$

- характеристическое св-во арифметической прогрессии

{x} - арифметическая прогрессия

$$x_n = x_1 + d(n-1)$$

$$\sqrt{\frac{(x_{2023} - x_1) \cdot 2022}{2021 \cdot (x_{2023} - x_1)}} = \sqrt{\frac{(x_1 + d(2023-1) - x_1) \cdot 2022}{2021 \cdot (x_1 + d(2023-1) - x_1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2021 \cdot d \cdot 2022}{2021 \cdot d \cdot 2022}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{\frac{(x_{2023} - x_1) \cdot 2022}{2021 \cdot (x_{2023} - x_1)}} + 2021 = 1 + 2021 = 2022$$

Ответ: 2022

Задача 5.

$$^{2022}\sqrt{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} \leq 0. \quad \text{корень взятые четное кол-во раз} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6 = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})^3 = (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x}) = x^3 + x + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6 = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) - 4(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})^3 - 7(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

пусть $x + \frac{1}{x} = t$

$$t^3 - 7t + 6 = 0$$

при $t = 2$

$$8 - 14 + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} t^3 - 7t + 6 \\ - t^3 - 2t^2 \\ \hline 2t^2 - 7t + 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} t-2 \\ \hline t^2 + 2t - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2t^2 - 7t + 6 \\ - 2t^2 + 4t \\ \hline -3t + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3t + 6 \\ -3t + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$t^3 - 7t + 6 = (t-2)(t^2 + 2t - 3)$$

$$\left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ t^2 + 2t - 3 = 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t^2 + 2t - 3 = 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

$$(1) \quad t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2$$

$$t_1 = -3$$

$$t_2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \\ t=1 \end{array} \right]$$

Вернёмся к замене

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 2$$

$$2x = x^2 + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

Бланк олимпиадной работы

$$x = -1$$

$$x + \frac{1}{x} = -3$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = -3$$

$$-3x = x^2 + 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 1$$

$$x^2 + 1 = x$$

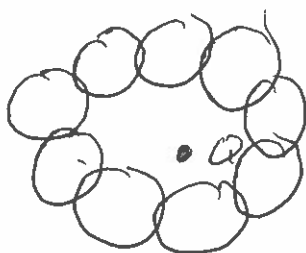
$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

Ответ: $1; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

2005

Задача 6.



Окружности по Q должны

с точками пересечения составлять



Q



рис. 1

Да Q - платформа
 Если рассматривать кольцо шириной
 18 км то разницы между
 радиусом из окружности в точке
 Q и точкой пересечения окружности
 от Q и такой же
 с точками пересечения доблится к
 18 км. На рис. 1
 Точка 1 - дальше, а точка
 2 - ближе к Q

Бланк олимпиадной работы

Рассмотри только две окружности из 8

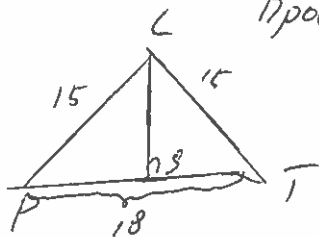


Пусть L, M — центры окружностей

P, T — точки пересечения

$$PT = 18 \quad LP = LT = PM = MT = 15$$

Проведем LS и PT



$\triangle LPT$ — равнобедренный $\Rightarrow LS$ — медиана

$$\Rightarrow PS = 9 \quad \text{по т. Пифагора} \quad LS = \sqrt{LP^2 - PS^2} = \sqrt{225 - 81} = 12 \quad LS = 12$$

LS — сторона правильного восьмиугольника
(т.н.) все окружности равны. по формуле радиуса описанной окружности $R = \frac{a \cdot \tan(\frac{\alpha}{2})}{2}$ $R = \frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ}{2}$

Радиус от платформы до S — меньший радиус
кольца $= \frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ}{2} = 9$, большего кольца $= \frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ}{2} + 9$

Площадь кольца = площадь большего окружности — площадь меньшего.

$$\left(\frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ + 18}{2} \right)^2 \cdot \pi - \pi \left(\frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ}{2} \right)^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ + 18}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{12 \cdot \tan 22.5^\circ}{2} \right)^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{144 \cdot \tan^2 22.5^\circ - 324}{4}$$

$$\text{Отв.: } \pi \cdot (36 \tan^2 22.5^\circ - 81)$$

180. Верный ход решения!

ошибки в конце решения!

Бланк олимпиадной работы

Задача 1.

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 4$$

$$\frac{a^2 - 9}{3a} = 4$$

$$12a = a^2 - 9$$

$$a^2 + 9 = 12a + 18$$

$$(a^2 + 9)^2 = (12a + 18)^2$$

$$(a^4 - 18a^2 + 81) = (144a^2 + 324a + 324)$$

$$\frac{(a^4 - 18a^2 + 81) \cdot 3a}{81a^3 \cdot (a^2 + 9)} = \frac{(a^2 - 9)^2}{27a^3 \cdot (a^2 + 9)} = \frac{(a^2 - 9)(a^6 + a^4 - 9 + a^2 \cdot 9^2 + a^2 \cdot 9)}{27a^3 \cdot (a^2 + 9)}$$

$$= \frac{a^4 \cdot (a^6 + a^4 - 9 + a^2 \cdot 9^2 + 9^3)}{27a^3 \cdot (12a + 18)} = \frac{4(a^6 + a^4 - 9 + (a \cdot 9)^2 + 9^3)}{9a^2 (a^2 + 9)}$$

? 005