

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	18	18	18						51	пятьдесят один балл	81-

Задача 1.

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$$

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 \cdot a^6} = \frac{a^{12}}{2^6 a^6} + \frac{2^{12}}{2^6 a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 =$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^6 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{a}\right)^3 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{a}\right)^3 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{a}\right)^3\right)^2 + 2 \cdot \frac{a^3 \cdot 2^3}{2^3 \cdot a^3} =$$

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 \left(\frac{a^2}{2^2} + \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a} + \frac{2^2}{a^2}\right)^2 + 2 =$$

$$= 3^2 \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} + \left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} + 1\right)^2 + 2 =$$

$$= 9 \left(\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 + 2 + 1\right)^2 + 2 = 9 (3^2 + 3)^2 + 2 = 9 (9 + 3)^2 + 2 = 9 \cdot 12^2 + 2 =$$

$$= 1296 + 2 = 1298$$

Ответ: 1298





$$(ab)c = a(bc)$$

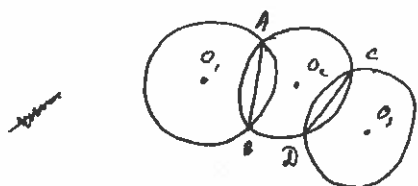
$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

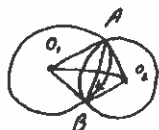
Задача 4.

Радары распределяют по некоторой окружности. Покрытие одного радара - круг с $r = 26$ км. Минимальная ширина кольца покрытия будет в местах пересечения $\bullet$ кругов покрытия каждого из радаров.



$AB = CD$ - ширина кольца (минимальная), т.к. во всех других местах ширина будет больше (показано на рисунке)

Радары будут составлены некоторый симметричный.



Каждо O_1, O_2 - ребро симметричного.

$$O_1A = AO_2 = O_2B = BO_1 = r = 26 \text{ км}$$

$$AB = 10 \text{ км}$$

$$AB \cap O_1O_2 = K$$

$$O_1AO_2B \text{ - ромб} \Rightarrow AK = KB$$

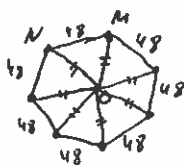
$$O_1K = O_2K$$

$$AB \perp O_1O_2$$

анал: 4/Сережа/5

$$O_2K = \sqrt{AO_2^2 - AK^2} \text{ (по Т. Пифагора)} = \sqrt{26^2 - 5^2} = \sqrt{(26-5)(26+5)} = \sqrt{21 \cdot 31} = \sqrt{651} = \text{нельзя}$$

$$= 4.6 = 24 \text{ (км)} \Rightarrow O_1O_2 = 2O_2K = 48 \text{ км}$$



Это схема расположения радаров, где в центре находится центральная платформа, а в вершинах симметричные радары.

Расстояние от центральной платформы до каждого из радаров одинаково.

$$\text{Пусть } OM = ON = x$$

$$\text{По Т. косинусов: } 48^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \angle NOM$$

$$\angle NOM = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{48}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}}$$

$$x = \frac{24\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}}{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}$$

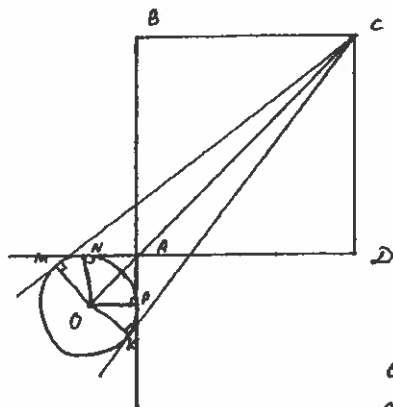
Радары
нужно расположить
на расстоянии

$$\left(\frac{48\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}}{1 - \cos \frac{2\pi}{3}} \right) \text{ км}$$

не найдено
расстояние!

Бланк олимпиадной работы

Задача 2.



Т.М и т.К - точки касания окружности и касательных, проведенных из точки С.

В $\triangle COK$ и $\triangle COM$:

$$\left. \begin{aligned} \angle OKC &= \angle CMO = 90^\circ \text{ (т.к. } R \text{ в точке касания)} \\ OK &= OM = R \\ OC &\text{ - общая сторона} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MCO = \angle OCK = \frac{\angle MCK}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

В $\triangle OCK$: $\sin \angle OCK = \frac{OK}{OC}$
 $OK = R$ $OC = AC + OA$

Пусть сторона квадрата равна $a = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}$ см, тогда:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} \text{ (по Т. Пифагора)} = a\sqrt{2}$$

В четырехугольнике NAPO:

$$\angle ONA = \angle OPA = 90^\circ \text{ (т.к. } ON \perp OP \text{ - } R \text{ в точке касания)}$$

$$\angle NAP = \angle PAD = 90^\circ \text{ (т.к. верт.) } (\angle PAD = 90^\circ, \text{ т.к. } ABCD \text{ - квадрат}) \Rightarrow NAPO \text{ - прямоугольник} \Rightarrow$$

$$NA = OP \text{ и } AP = ON$$

$$\text{т.к. } ON = OP \Rightarrow NA = AP = PO = ON = R$$

$$OA = \sqrt{AP^2 + OP^2} \text{ (по Т. Пифагора)} = R\sqrt{2}$$

$$OC = a\sqrt{2} + R\sqrt{2} = \sqrt{2}(a + R)$$

$$\sin \angle OCK = \frac{R}{\sqrt{2}(a + R)}$$

По условию: $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\sin \angle OCK = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(a + R)} \quad \sqrt{5 - \sqrt{5}} \cdot a + R \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} = 2R$$

$$R(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = a \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

Подставим а:

$$R = \frac{(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \text{ см} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{5 - \sqrt{5}} \text{ см}$$

Ответ: $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ см

Бланк олимпиадной работы

Задание 5.

$$k \in [3; 8] \quad x_1 \leq 2x_2$$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$A = k^2 - 2k - 3$$

I. При $k^2 - 2k - 3 = 0$

$$k = -1$$

$$k = 3$$

$$0x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

Уравнение становится линейным $\Rightarrow$ 1 корень,
но по условию должно быть два
корня $\Rightarrow k \neq \{-1; 3\}$

II. $k \neq -1$ и $k \neq 3$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 =$$

$$= (k - 7)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3k + 5 \pm (k - 7)}{2(k + 1)(k - 3)}$$

1) при $k \geq 7$:

$$x_1 = \frac{-3k + 5 - k + 7}{2(k + 1)(k - 3)} = \frac{-4k + 12}{2(k + 1)(k - 3)} = \frac{-2(k - 3)}{(k + 1)(k - 3)} = \frac{-2}{k + 1}$$

$$x_2 = \frac{-3k + 5 + k - 7}{2(k + 1)(k - 3)} = \frac{-2k - 2}{2(k + 1)(k - 3)} = \frac{-2(k + 1)}{2(k + 1)(k - 3)} = \frac{-1}{k - 3}$$

при $k \geq 7$ $A > 0 \Rightarrow x_2 \geq x_1$

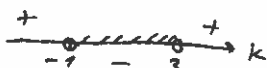
Проверим условие, что $x_1 \leq 2x_2$

$$\frac{-2}{k + 1} \leq 2 \cdot \frac{-1}{k - 3}$$

$$\frac{-2}{k + 1} + \frac{2}{k - 3} \leq 0$$

$$\frac{-2k + 6 + 2k + 2}{(k + 1)(k - 3)} \leq 0$$

$$\frac{8}{(k + 1)(k - 3)} \leq 0$$



По условию $k \in [3; 8] \Rightarrow$ данный
вариант $k \geq 7$ не подходит $\Rightarrow$
 $k < 7$

Бланк олимпиадной работы

2) $k < 7$

$$x_1 = \frac{-3k+5 - (-k+2)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-3k+5+k-2}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2k-2}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2(k+1)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-1}{k-3}$$

$$x_2 = \frac{-3k+5 + (-k+2)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4k+7}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-4(k-3)}{2(k+1)(k-3)} = \frac{-2}{k+1}$$

По условию $k \in [3; 8]$

при $k \in (3; 7)$: $A > 0 \Rightarrow x_1 \leq x_2$

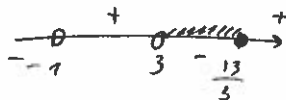
Проверим условие, что $x_1 \leq x_2$

$$\frac{-1}{k-3} \leq 2 \cdot \frac{-2}{k+1}$$

$$\frac{-1}{k-3} + \frac{4}{k+1} \leq 0$$

$$\frac{-k-1+4k-12}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$

$$\frac{3k-13}{(k-3)(k+1)} \leq 0$$



при $k \in (3; \frac{13}{3}]$: $x_1 \leq x_2$

Нужно выяснить, какова вероятность того из отрезка $[3; 8]$ выпало число, принадлежащее отрезку $(3; \frac{13}{3}]$. Приведу все числа к знаменателю 3, для удобства рассмотрим крайних точек.

$$\bullet [\frac{9}{3}; \frac{24}{3}]$$

$$\bullet (\frac{9}{3}; \frac{13}{3}]$$

~~Получим длину отрезка с помощью формулы: длина отрезка = правая точка - левая точка~~

Получим длину данных отрезков: интервалов:

Для первого $[\frac{9}{3}; \frac{24}{3}]$: $\frac{24}{3} - \frac{9}{3} + 1 = 6$

Для второго $(\frac{9}{3}; \frac{13}{3}]$: $\frac{13}{3} - \frac{9}{3} = \frac{4}{3}$

Вероятность равна: $\frac{4}{3} : 6 = \frac{2}{9}$?

Ответ: $\frac{2}{9}$

