

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания ТТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	1	15	14	10	0	—	—	—	—	55	пятьдесят пять	Шарфеев

Задача 6.

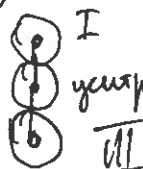
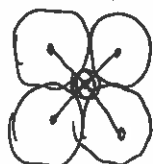
Анализ: работа выполнена в соответствии с критериями



Пусть пирамида составлена таким образом
 I ярус - 5 шаров
 II ярус - 4 шара
 III ярус - 1 шар

05

Тогда шар, касающийся 6 других шаров может находиться между 4 шарами второго яруса, а также между шаром верхнего яруса и центральным шаром второго яруса



I
II
III
центральный шар



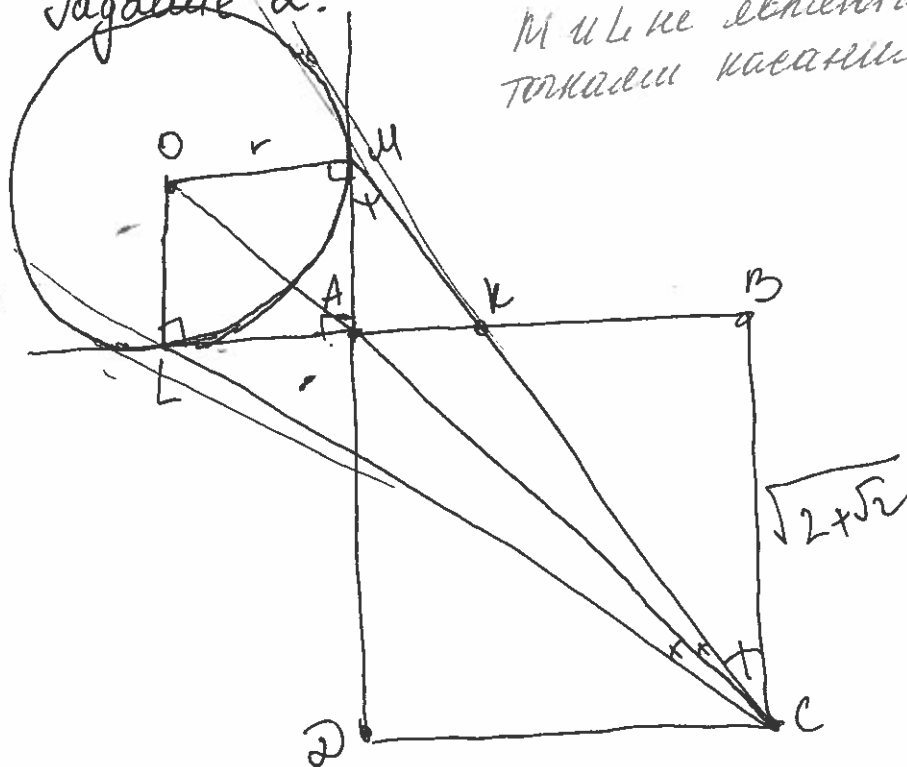
104571

Бланк олимпиадной работы

Задача 1.

$$\begin{aligned} \frac{a^{12} + 4096}{64a^6} &= \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 1\right) \quad 58 \\ &\cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^4\right) = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 1\right) = \\ &= \left(\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\right) \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 1\right) = (25 + 2) \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 1\right) \\ &= 27 \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 1\right) = 27 \cdot \left(\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 1\right) \\ &= 27(27^2 - 2 - 1) = 27(729 - 3) = 27 \cdot 726 = \\ &= \underline{19602} \end{aligned}$$

Задача 2.



Милые элементы
тоже касание

Дано: ABCD -
угольник;

$$BC = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$

$\tau_{dl}, \tau_{\perp} \approx \text{точнее}$
на самом опыте
 $\angle MCL = 45^\circ$

5-2

Г-?
0^{об.} центр о кружности

Лист 2 из 8

СВ и СМ не являются касательными к окружности и $\angle MSB \neq 45^\circ$.



Бланк олимпиадной работы

Решение:

1. Проведём радиусы OM и OL , т. M и L - точки касания $\Rightarrow OM \perp AD$; $OL \perp AB \Rightarrow \angle OMA = 90^\circ$; $\angle OLA = 90^\circ$
 2. $\angle LAM = 90^\circ$, как верт. и. $\angle LAM = \angle DAB$ в квадрате, как вертикальные
 3. $\Rightarrow OLAM$ -квадрат.
 4. Проведём OA -диагональ квадрата $OLAM \Rightarrow \angle OAL = 45^\circ$;
 $LA \parallel DC$, т. к. $ABCD$ -квадрат $\Rightarrow$ продолжение отрезка OA должно пересечь прямую DC под углом $\approx 45^\circ$ (равным $\angle OAL$) и
 но возможно только при $OA \cap DC = T, C$
 т. к. $AC \cap DC$ под углом 45° , как диагональ квадрата
 5. Рассмотрим $\triangle LOC$ и $\triangle OMC$:
 $OL = OM$, как радиусы окружности
 $\angle LOA = \angle MAO = \angle MOA$, как т. к. AO -диагональ
 OC -общая
 $\Rightarrow \triangle OMC = \triangle OLC \Rightarrow \angle LCO = \angle MCO = 22,5^\circ$
 6. $\angle KCB = \angle ACB - \angle MCO = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ$
- или 4. $1 + \operatorname{ctg}^2 22,5^\circ = \frac{1}{\sin^2 22,5^\circ}$
 $\operatorname{ctg}^2 22,5^\circ = \frac{1}{\sin^2 22,5^\circ} - 1$

Бланк олимпиадной работы

$$\operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - 1 = \frac{4-2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}; (\operatorname{ctg} 22,5^\circ > 0, \text{ т.к. } 22,5^\circ < 45^\circ)$$

$$8. \operatorname{ctg} \angle BCK = \frac{BC}{KB} \Rightarrow KB = \frac{BC}{\operatorname{ctg} \angle BCK} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$9. AK = AB - KB = \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

10. Рассмотрим $\triangle AMK$; $\angle MKA = \angle KBC$, так как вертикальные,
и $\angle MAK = \angle KBC = 90^\circ \Rightarrow \angle AMK = \angle BCK = 22,5^\circ$

$$11. \Rightarrow \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{AM}{AK} \Rightarrow AM = AK \cdot \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} (\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{4-2} - 2+\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2} - \sqrt{4-2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

$$12. AM = OL, \text{ т.к. } OLAM - \text{квадрат} \Rightarrow OLAM = r \Rightarrow r = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

Ответ: $r = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$

Бланк олимпиадной работы

из Задача 3.

$$\begin{cases} x^2 + 25y + 19z = -441 & (I) \\ y^2 + 23x + 21z = -397 & (II) \\ z^2 + 21x + 21y = -545 & (III) \end{cases}$$

$I+II+III$

$$x^2 + 44x + y^2 + 46y + z^2 + 40z = -545 - 397 - 441$$

$$x^2 + 44x + y^2 + 46y + z^2 + 40z = -1413$$

$$(x+22)^2 + (y+23)^2 + (z+20)^2 - 484 - 529 - 400 = -1413$$

$$(x+22)^2 + (y+23)^2 + (z+20)^2 - 1413 = -1413$$

$$(x+22)^2 + (y+23)^2 + (z+20)^2 = 0$$

15.

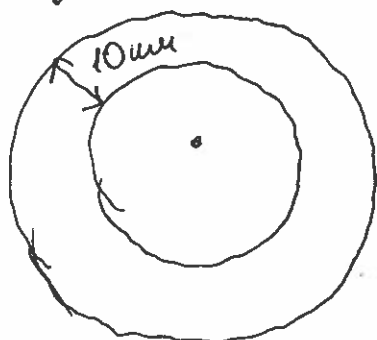
$$\begin{cases} x+22=0 \\ y+23=0 \\ z+20=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ равенство достигается только

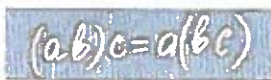
$$\text{при } \begin{cases} x+22 \geq 0 \\ (y+23)^2 \geq 0 \\ (z+20)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -22 \\ y \geq -23 \\ z \geq -20 \end{cases}$$

Ответ: $x \geq -22$; $y \geq -23$; $z \geq -20$

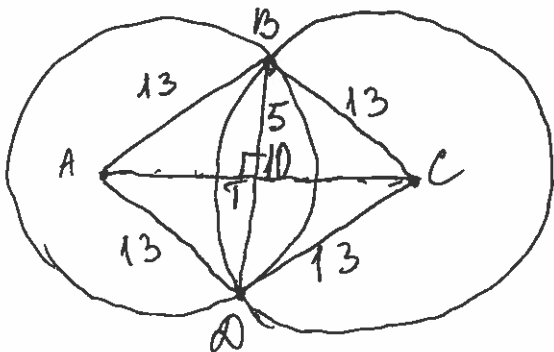
Задача 4.



нас интересует максимальное расстояние $\Rightarrow$ будем считать что внешняя 10 см - ширина участка, где ~~с~~ наименьшей шириной, которая получается при наложении покрытий дорожек друг на друга

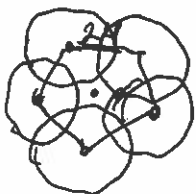


Бланк олимпиадной работы



1. Рассмотрим систему
у двух соседних радиаров
 $\triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow \angle ADC = \angle ABC$;
 $\triangle ABD = \triangle BDC \Rightarrow \angle ADB = \angle BCD$
 $AB = BC = CD = AD$
 $\Rightarrow ABCD$ - ромб

2. Рассмотрим $\triangle BTC$ - прямоугольный. По теореме Пифагора
 $TC = \sqrt{BC^2 - BT^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \Rightarrow AC = 24$ - расстояние
 $\Rightarrow$ расстояние между соседними радиарами равно 24



Тогда расстояние от центра до каждого
у радиаров - радиус окружности, описанной
около правильного многоугольника со
сторонами 24.

Рассмотрим многоугольник

KLMP

$$\angle LOM = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\angle KLM = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ \Rightarrow \angle OLM = \frac{1}{2} \cdot \angle KLM = 54^\circ$$

$$\sin \angle LOM = \frac{LM}{OM} \Rightarrow R = \frac{LM}{\sin \angle LOM} = \frac{24}{\sin 54^\circ}$$

Ответ: на расстоянии $\frac{24}{\sin 54^\circ}$ от центра многоугольника



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

104571

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Задача 5.

$$k \in [6; 11]$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$(k^2 - 2k - 15)x^2 + (3k - 4)x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9k^2 - 42k + 49 - 8(k^2 - 2k - 15) =$$

$$= 9k^2 - 42k + 49 - 8k^2 + 16k + 120 = k^2 - 26k + 169 = (k - 13)^2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-3k + 4 \pm (k - 13)}{2(k^2 - 2k - 15)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3k + 4 - k + 13}{2(k+3)(k-5)} \\ x_2 = \frac{-3k + 4 + k - 13}{2(k+3)(k-5)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4k + 20}{2(k+3)(k-5)} \\ x_2 = \frac{-2k - 6}{2(k+3)(k-5)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4}{2(k+3)} \\ x_2 = \frac{-2}{2(k+3)(k-5)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2}{k+3} \\ x_2 = \frac{-1}{k-5} \end{cases}$$

$$k \neq 5$$

$$k \neq -3$$

имеем уравнение имеем его корни

$$\textcircled{1} x_1 = -\frac{2}{k+3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{k-5}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{2}{k+3} \leq -\frac{1}{k-5}$$

$$\frac{1}{k+3} \geq \frac{1}{k-5}$$

$$\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k-5} \geq 0$$

$$\frac{k-5-k-3}{(k+3)(k-5)} \geq 0$$

$$\frac{-8}{(k+3)(k-5)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(k+3)(k-5)} \leq 0 \quad k \in (-3; 5)$$

205

205

Бланк олимпиадной работы

② $x_1 = -\frac{1}{k-5}$
 $x_2 = -\frac{2}{k+3}$

$-\frac{1}{k-5} \leq -\frac{4}{k+3}$

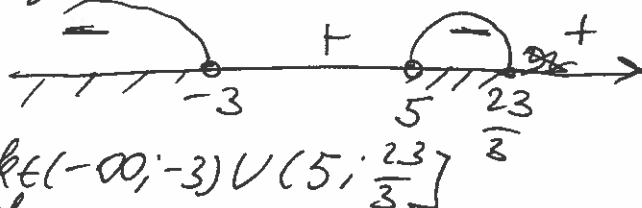
$\frac{1}{k-5} \geq \frac{4}{k+3}$

$\frac{1}{k-5} - \frac{4}{k+3} \geq 0$

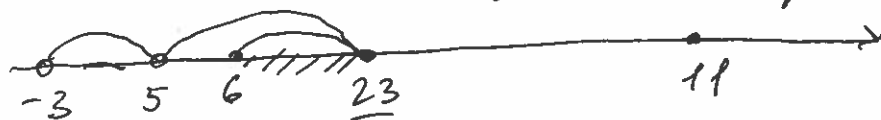
$\frac{k+3-4k+20}{(k-5)(k+3)} \geq 0$

$\frac{-3k+23}{(k-5)(k+3)} \geq 0$

$\frac{3k-23}{(k-5)(k+3)} \leq 0$



Объединим результаты двух случаев и пересечем их с отрезком $[6; 11]$



$p_2 = \frac{\frac{23}{3}-6}{11-6} = \frac{\frac{23-18}{3}}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Ответ: $p_2 = \frac{1}{3}$