



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

117349

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МАОУ СОШ №53

### ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3                            | 4 | 5                          | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ                            |                | Подпись        |
|--------|---|----|------------------------------|---|----------------------------|---|---|---|---|----|------------------------------|----------------|----------------|
|        |   |    |                              |   |                            |   |   |   |   |    | Цифрой                       | Прописью       |                |
| Оценка | 5 | 10 | 13<br><i>15 (Пятидесяти)</i> | 0 | 18<br><i>20 (Двадцать)</i> | 0 | - | - | - | -  | 46<br><i>50 (Пятидесяти)</i> | сорок<br>шесть | <i>Варенко</i> |

Задача 1.

$$\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2} = 4$$

$$\frac{a^4 - 9}{3a^2} = 4 \rightarrow a^4 - 12a^2 - 9 = 0; a^2 = t, t \geq 0$$

$$t^2 - 12t - 9 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 9 = 180$$

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{180}}{2} = 6 \pm \sqrt{45} = 6 \pm 3\sqrt{5}$$

$$\frac{a^{12} - 729}{27a^6} = \frac{(a^6 - 3^3)(a^6 + 3^3)}{3^3 a^6} =$$

$$a^4 = (a^2)^2 = 36 + 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5} + 9 \cdot 5 = 81 + 36\sqrt{5}$$

$$a^6 = a^4 \cdot a^2 = (81 + 36\sqrt{5})(6 + 3\sqrt{5}) = 81 \cdot 6 + 81 \cdot 3\sqrt{5} + 36 \cdot 6\sqrt{5} + 36 \cdot 3 \cdot 5 = 1026 + 459\sqrt{5}$$

$$= \frac{(1053 + 459\sqrt{5})(999 + 459\sqrt{5})}{3^3(1026 + 459\sqrt{5})} = \frac{(351 + 153\sqrt{5})(111 + 51\sqrt{5})}{1026 + 459\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{38961 + (16983 + 17901)\sqrt{5} + 39015}{1026 + 459\sqrt{5}} = \frac{77976 + 34884\sqrt{5}}{1026 + 459\sqrt{5}} = \frac{76(1026 + 459\sqrt{5})}{1026 + 459\sqrt{5}} = 76$$

Лист 1 из 7

Ответ: 76 + 55.

Бланк олимпиадной работы

Задача 3.

$$\sqrt{x-x^2+\sqrt{9-x^2}(-7+8x-x^2)}=7$$

$$\sqrt{(x^2-9)(x^2-8x+7)}=7-4x+x^2$$

$$7-4x+x^2 \geq 0$$

$$(x^2-9)(x^2-8x+7)=(7-4x+x^2)^2; \text{ из этого уравнения следует, что ОДЗ выполняется всегда}$$

$$x^4-8x^3-2x^2+72x-63-x^4-8x^3-30x^2-56x+49=(7-4x+x^2)^2 \geq 0$$

$$32x^2-128x+112=0 \quad |:8$$

$$4x^2-16x+14=0$$

$$D=16^2-16 \cdot 14=16 \cdot 2$$

$$x_{1,2}=\frac{16 \pm 4\sqrt{2}}{8}=2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } (9-x^2)(-7+8x-x^2) \geq 0$$

$$(x^2-9)(x^2-8x+7) \geq 0$$

а вот это мер-то?

$$7-4x+x^2 \geq 0$$

$$x^2-4x+7 \geq 0$$

$$D=16-28 < 0 \rightarrow \text{всегда выше оси } OX \cup$$

Ответ:  $x = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

135. анн: 15 (пятизнач)

Задача 5.

$$(k^2-3k-10)x^2+(3k-8)x+2=0$$

$$D=(3k-8)^2-8(k^2-3k-10)=9k^2-48k+64-8k^2+24k+80=$$

$$=k^2-24k+144=(k-12)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-3k+8 \pm (k-12)}{2(k^2-3k-10)} = \begin{cases} \frac{-2k-4}{2(k-5)(k+2)} = \frac{-2(k+2)}{2(k-5)(k+2)} = \frac{-1}{k-5} \\ \frac{-4k+20}{2(k-5)(k+2)} = \frac{-4(k-5)}{2(k-5)(k+2)} = \frac{-2}{k+2} \end{cases}$$

$$k^2-3k-10=0$$

$$D=9+40=49$$

$$k_{1,2}=\frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2}=5 \\ -\frac{4}{2}=-2 \end{cases}$$

Бланк олимпиадной работы

Продолжение задания 5.

$$D) x_1 = -\frac{1}{k-5}$$

$$x_2 = \frac{-2}{k+2}$$

Причем может и

$$② x_2 = -\frac{1}{k-5}$$

$$x_1 = \frac{-2}{k+2}$$

Рассмотрим оба случая:

$$① \frac{-1}{k-5} \leq \frac{-2}{k+2} \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{k-5} \geq \frac{2}{k+2} \quad \begin{matrix} \cdot k-5 > 0 \\ \cdot k+2 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{по} \\ \text{условию} \end{matrix}$$

$$k+2 \geq 4k-20$$

$$22 \geq 3k$$

$$k \leq \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

$$② \frac{-2}{k+2} \leq \frac{-2}{k-5} \quad | : (-2)$$

$$\frac{1}{k+2} \geq \frac{1}{k-5} \quad \begin{matrix} \cdot k+2 > 0 \\ \cdot k-5 > 0 \end{matrix}$$

$$k-5 \geq k+2 \quad \begin{matrix} \text{по} \\ \text{условию} \end{matrix}$$

$$-5 \geq 2$$

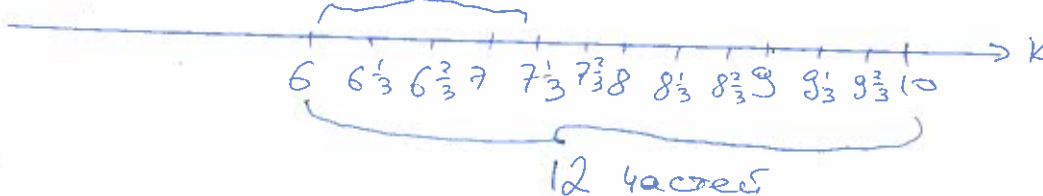
∅

Итого: при  $k \in [6; \frac{22}{3}]$   $x_1 \leq x_2 \rightarrow$  это благоприятные исходы

$k \in [6; 10] \rightarrow$  все исходы

4 часа

1 час =  $\frac{1}{3}$



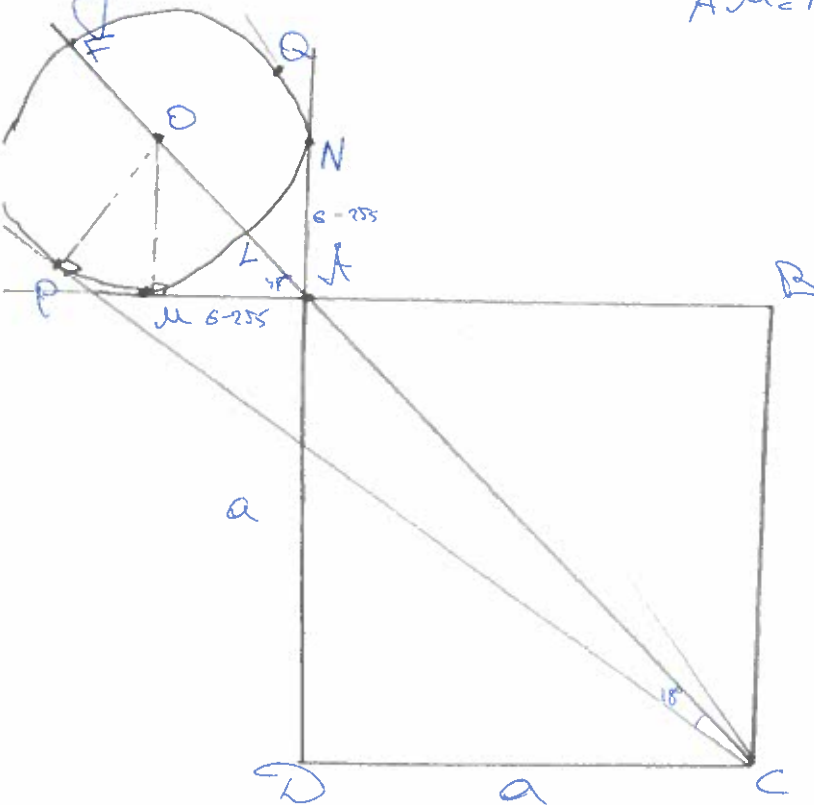
$$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ответ:  $\frac{1}{3}$  ( ~~$\approx 33,3\%$~~ )

это не точный  
ответ.  
185. 20 (двадцать)  
амел; баллов.

# Бланк олимпиадной работы

## Задача 2



$AM = AN = 6 - 2\sqrt{5}$  (отрезки касательных проведенных из одной точки)

Рассмотрим  $A$  и  $A'$ :

$O\omega \perp MA$  ( $O\omega$  - радиус)  
( $MA$  - касательная)

$$\angle MAO = 45^\circ \rightarrow OA = MA = 6\sqrt{5}$$
$$\rightarrow \sqrt{2}(6-2\sqrt{5}) = OA$$

Рассмотрим  $\Delta OBC$

OP & PC (OP - радиус  
PC - высота)

$\sin 18^\circ = \frac{OP}{OC}$  ( $\angle PCO = 18^\circ$ , так как симметрия относительно диагонали  $AC$ )

$OP - OM$  (радиусы)

$$OC = OA + AC$$

$$\sin 18^\circ = \frac{OM}{OA+AC}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}(6-2\sqrt{5})+AC}$$

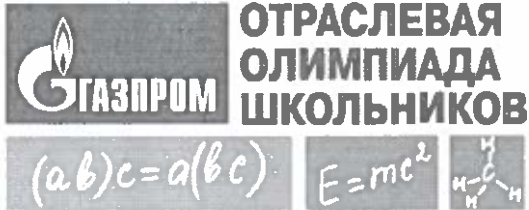
$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}(6+2\sqrt{5})+Ac) = 24 - 8\sqrt{5}$$

$$\sqrt{10}(6-2\sqrt{5}) + \sqrt{5}AC - \sqrt{2}(6-2\sqrt{5}) - AC = 4(6-2\sqrt{5})$$

$$AC(\sqrt{5}-1) = (6-2\sqrt{5})(4+\sqrt{2}-\sqrt{10})$$

$$AC = \frac{(6-2\sqrt{5})(4+\sqrt{2}-\sqrt{10})}{\sqrt{5}-1}$$

AC - диагональ квадрата



ШИФР

114349

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

продолжение задания 2

из  $\Delta ADC \rightarrow \sqrt{2}a = AC$

$$a = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{(6-2\sqrt{3})(4+\sqrt{2}-\sqrt{10})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{8(3-\sqrt{5}-\sqrt{10}+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} =$$

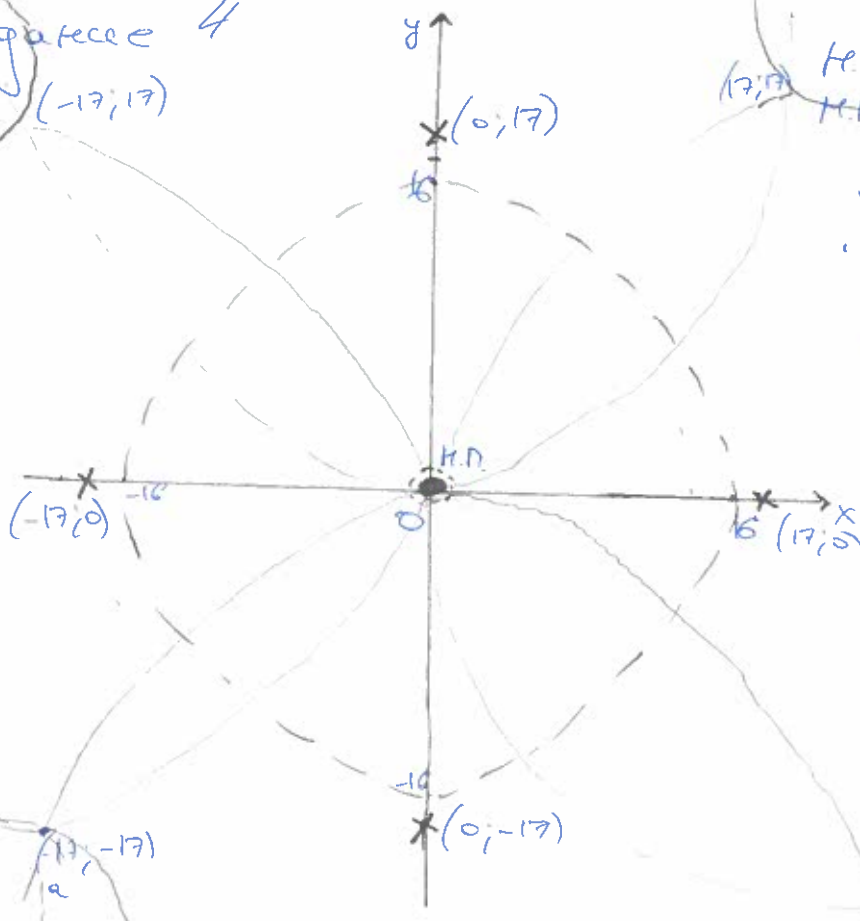
$$= \frac{8(3-\sqrt{5}-\sqrt{10}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{2}} = \frac{8(3\sqrt{5}-5-5\sqrt{2}+2\sqrt{10}+3-\sqrt{5}-\sqrt{10}+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{8(-2+\sqrt{10}+2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}(-2+\sqrt{10}+2\sqrt{5}-3\sqrt{2}) =$$

$$= -2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-6 = 2(-3-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$$

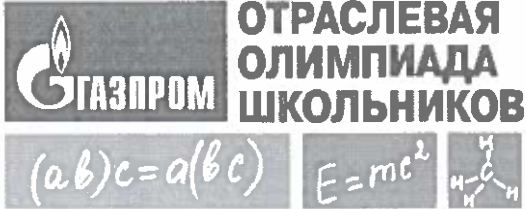
Ответ:  $AD = a = 2(-3-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$  + 100.

Задание 4



Н.П. - керманская платформа  
Н.П. (0,0)

X - места расположения  
радаров  
дугами обозначены  
площади покрытия



ШИФР

114349  
0123456789

## Бланк олимпиадной работы

Продолжение задания 4

из  $\Delta$  в левом нижнем углу:  $\sqrt{2}a = 17$   
 $a = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ 

→ координаты ещё 4-х радаров будут

следующие:  $(17 + \frac{17\sqrt{2}}{2}, 17 + \frac{17\sqrt{2}}{2})$  $(17 + \frac{17\sqrt{2}}{2}, 17 - \frac{17\sqrt{2}}{2})$  $(-17 - \frac{17\sqrt{2}}{2}, 17 + \frac{17\sqrt{2}}{2})$  $(-17 - \frac{17\sqrt{2}}{2}, 17 - \frac{17\sqrt{2}}{2})$ Из-за симметрии картинки относительно центра (а также относительно осей  $Ox, Oy$ )

$$S = \pi R^2 = 16^2 \pi = 256\pi$$

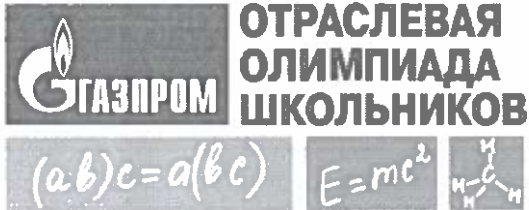
Ответ: ~~256π~~по условию,  
радаров 8!  
ОД.

Задание 6

$$\begin{cases} x+y+z=10 & (1) \\ xy+yz+xz=-22 & (2) \end{cases} \text{ видно, что } x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ (из 1-го уравнения системы)}$$

это неверно.

$$\begin{aligned} xy+x+yz+y+xz+z &= -12 & xy-x+yz-y+xz-z &= -32 \\ x(y+1)+z(y+1)+xz &= -12 & x(y-1)+z(y-1)+xz &= -32 \\ (x+z)(y+1)+xz &= -12 & (x+z)(y-1)+xz &= -32 \end{aligned}$$



ШИФР

114347

0123456789

## Бланк олимпиадной работы

продолжение задания 6

из (1):  $y = 10 - x - z$

подставим в (2):

$$10x - x^2 - xz + 10z - xz - z^2 + xz = -22 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 10x + z^2 - 10z + xz = 22$$

$$(x-5)^2 + (z-5)^2 = 22 - xz$$

$$x^2 + x(z-10) + z^2 - 10z - 22 = 0$$

$$D = z^2 - 20z + 100 - 4z^2 + 40z + 88z - 3z^2 + 20z + 188$$

относительно  $x$

$$-3z^2 + 20z + 188 = 0$$

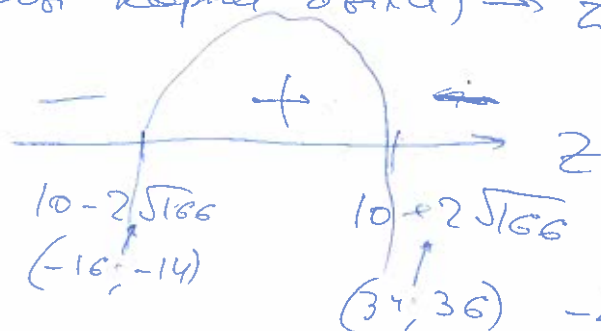
$$3z^2 - 20z - 188 = 0$$

$$D = 400 + 12 \cdot 188 = 2656$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{188} \\ \times 12 \\ \hline + 376 \\ 1880 \\ \hline + 2256 \\ 400 \\ \hline 2656 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-z + 10 \pm \sqrt{-3z^2 + 20z + 188}}{2}$$

$$D \geq 0 \text{ (чтобы корни были)} \rightarrow z_{1,2} = \frac{20 \pm 4\sqrt{166}}{2} = 10 \pm 2\sqrt{166}$$



$$12 < \sqrt{166} < 13$$

$$24 < 2\sqrt{166} < 26$$

$$34 < 10 + 2\sqrt{166} < 36$$

$$-26 < -2\sqrt{166} < -24$$

$$-16 < 10 - 2\sqrt{166} < -14$$

Лист 7 из 7

05.